Konceptuální svazy a formální konceptuální analýza

Radim Bělohlávek

Katedra informatiky, Univerzita Palackého,
Tomkova 40, 779 00, Olomouc
radim.belohlavek@upol.cz

Abstrakt. Článek podává přehled o formální konceptuální analýze, její historii, základních pojmech, současném stavu a perspektivách.

Klíčová slova: objekt-atributová data, konceptuální svaz, formální konceptuální analýza, shluk, formální koncept

1 Co je formální konceptuální analýza?

Tabulková data Když lidé formulují své znalosti o okolním světě, hovoří nejčastěji o *objektech*, jejich *atributech* (tj. vlastnostech) a formulují různě složitá tvrzení o tom, že některé objekty mají některé atributy. Základním vztahem je přitom vztah *mít* mezi objekty a atributy: pro daný objekt a daný atribut platí, že objekt má daný atribut (Země obíhá kolem Slunce), nebo objekt nemá daný atribut (dané slovo se nevyskytuje v daném textovém dokumentu), popř. objekt má daný atribut do jisté míry (Škoda vyrábí levná auta), objekt má daný atribut s jistou hodnotou (dané slovo se vyskytuje v daném dokumentu 76 krát) apod. Vztah mít mezi objekty a atributy bývá nejčastěji reprezentován tabulkou (maticí), ve které řádky odpovídají objektům, sloupce atributům a položka tabulky odpovídající objektu x a atributu y obsahuje informaci o tom, zda a popř. s jakou hodnotou má objekt x atribut y, viz Tab. 1. Tabulková data představují

Tabulka 1. Tabulková data s objekty x_i a atributy y_j.

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_l
x_1			$\vdots$		
$\vdots$			$\vdots$		
x_i	$\dots$	$\dots$	$I(x_i, y_j)$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$			$\vdots$		
x_k			$\vdots$		

základní formu reprezentace dat pro různé metody analýzy a zpracování dat.

Formální konceptuální analýza Formální konceptuální analýza (FKA) je jednou z metod analýzy tabulkových dat. Místo termínu "formální konceptuální analýza" se také používá termín "metoda konceptuálních svazů". Vstupem pro formální konceptuální analýzu jsou tabulková data. FKA je metodou explorativní (průzkumové) analýzy dat. Nabízí uživateli netriviální informace o vstupních datech, které mohou být využitelné přímo (jsou to nové poznatky o vstupních datech, které nejsou při pouhém pohledu na vstupní data zřejmé), popř. mohou být využitelné při dalším zpracování dat. FKA poskytuje dva základní výstupy: tzv. konceptuální svaz (což je hierarchicky uspořádaná množina jistých shluků, tzv. formálních konceptů, které jsou přítomny ve vstupní tabulce dat) a tzv. atributové implikace (které popisují jisté závislosti mezi atributy tabulky dat). V následujícím výkladu budeme pro jednoduchost předpokládat, že atributy ve stupních datech jsou bivalentní logické atributy (ano/ne atributy), tj. pro každý atribut y a každý uvažovaný objekt x platí, že x má y nebo x nemá y. Tabulka popisující takové atributy obsahuje v položce odpovídající x a y hodnotu 0 (x má y), nebo hodnotu 1 (x nemá y). Příklad takové tabulky je uveden v Tab. 1. O rozšíření FKA na tabulky obsahující obecnější data se zmíníme později.

Tabulka 2. Tabulka popisující objekty x_1, x_2, x_3 a bivalentní logické atributy y_1, y_2, y_3, y_4.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	0	0
x_2	0	1	1	0
x_3	0	0	1	1

Formální koncepty, konceptuální svaz Vytváření pojmů je základním způsobem, díky němuž je člověk schopen vyznat se ve světě plném obrovského množství jednotlivých věcí a faktů. Vytváření a práce s různě obecnými pojmy umožňuje člověku popisovat obecné zákonitosti, které se týkají velkého množství jednotlivostí, umožňuje netriviální komunikaci mezi lidmi, klasifikaci a kognitivní uspořádání okolního světa apod. Intuitivně je pojem něco, co vymezuje jisté seskupení nějakých objektů, tedy jakýsi shluk objektů, které z nějakého důvodu "patří k sobě". Snaha najít v datech důležité shluky/pojmy má dlouhou tradici. Zásadní roli hraje, co rozumíme termínem "důležitý shluk/pojem".

Ve FKA je termín pojem chápán v souladu s tzv. Port-Royalskou logikou [1]. Podle ní je pojem tvořen svým rozsahem (angl. extent, něm. Umfang, franc. étendue) a obsahem (angl. intent, něm. Inhalt, franc. comprehension). Rozsah pojmu je seskupení všech objektů, které pod pojem patří. Obsah pojmu je seskupení všech atributů, které pod pojem patří. Například u pojmu PES je rozsahem seskupení všech psů, obsahem seskupení všch atributů všech psů, např. "štěkat", "mít čtyři nohy", "mít ocas", apod (poznamenejme, že ve FKA nejde o to poskytnout psychologicky, popř. filozoficky zcela věrohodnou teorii pojmů; jde o to, mít k dispozici intuitivně přijatelnou a formálně schůdnou koncepci pojmu). Pojem lze tedy chápat jako dvojici (A, B), kde A je množina objektů a B je množina atributů, které pod pojem patří. Ne každou dvojici (A, B) je však možné považovat za pojem. Aby tomu tak bylo, je nutné, aby A byla právě množinou všech objektů sdílejících všechny atributy z B a naopak, aby B byla právě množinou všech atributů společných všem objektům z A (a to je také definice pojmu použitá ve FKA). Pojem ve smyslu FKA (tj. dvojici (A, B) splňující zmíněné požadavky) budeme v dalším nazývat koncept, popř. formální koncept. Poznamenejme, že koncepty vzájemně jednoznačně odpovídají v tabulkových datech maximálním obdélníkům vyplněným jedničkami.

Pojmy používané člověkem jsou hierarchicky uspořádány vztahem podpojem-nadpojem, daný pojem může být méně nebo více obecný než jiné pojmy. Tento vztah je ve FKA modelován následovně. Řekneme, že koncept (A_1, B_1) je podpojmem konceptu (A_2, B_2) (tj. první koncept je nejvýše tak obecný jako druhý; duálně, druhý je nadpojmem prvního, popř. aspoň tak obecný jako první) pokud platí, že každý objekt z A_1 patří do A_2 nebo, což je ekvivalentní, že každý atribut z B_2 patří do B_1. Tato podmínka, kterou značíme $(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2)$, odpovídá intuici. Např. pojem PES je podpojmem pojmu SAVEC, protože každý objekt, který je psem, je také savcem (nebo, ekvivalentně, každý atribut savců je také atributem psů). Vztah podpojem-nadpojem umožňuje množinu všech konceptů uspořádat podle jejich obecnosti. Takto uspořádaná množina všech konceptů se nazývá konceptuální svaz (budeme se jí věnovat později).

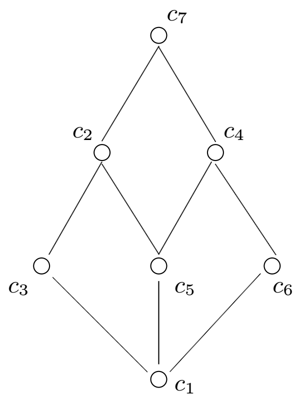
Uvažujme znovu Tab. 1. Snadno můžeme ověřit, že v datech z tabulky existuje právě 7 konceptů, které jsou popsány v Tab. 1 (např. c_2 je koncept (A_2, B_2), kde $A_2 = \{x_2, x_3\}$ a $B_2 = \{y_3\}$, tj. pod koncept c_2 patří objekty x_2 a x_3 a atribut y_3). Příslušný konceptuální svaz je na Obr. 1.

Tabulka 3. Koncepty z dat z Tab. 1.

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4
c_1	1	1	1	0	0	0	0
c_2	0	1	1	0	0	1	0
c_3	0	0	1	0	0	1	1
c_4	1	1	0	0	1	0	0
c_5	0	1	0	0	1	1	0
c_6	1	0	0	1	1	0	0
c_7	0	0	0	1	1	1	1

Atributové implikace Atributové závislosti jsou ve FKA vyjadřovány pomocí implikací tvaru

atributy $y_1, \ldots z_1$ implikují atributy $y_2, \ldots, z_2$,



Obr. 1. Konceptuální svaz z dat z Tab. 1.

což se formálně zapisuje $\{y_1, \dots, z_1\} \Rightarrow \{y_2, \dots, z_2\}$. Význam takové implikace je ten, že každý formální koncept, který (ve svém obsahu) obsahuje $y_1, \dots, z_1$, obsahuje i $y_2, \dots, z_2$ (ze ukázat, že to platí, právě když každý objekt, který má všechny atributy z $y_1, \dots, z_1$, má také všechny atributy z $y_2, \dots, z_2$). V tomto smyslu implikace platí ve vstupních datech. Ve vstupních datech však platí velké množství implikací, řada z nich je triviálních. Proto je užitečné hledat nějakou nereduntantní podmnožinu všech platných implikací, ze které popř. všechny ostatní platné implikace logicky vyplývají.

Uvažujme opět data z Tab. 1. Snadno se přesvědčíme, že implikace $\{y_4\} \Rightarrow \{y_3\}$ a $\{y_1\} \Rightarrow \{y_2\}$ v datech platí. Naproti tomu, implikace $\{y_3\} \Rightarrow \{y_4\}$ neplatí, protože objekt x_3 má atribut y_3, ale nemá atribut y_4.

2 Teoretické základy: základní pojmy, výsledky, algoritmy

V této sekci podrobněji, ale stručně, vysvětlíme základní pojmy teoretické výsledky, které se týkají FKA. Pro podrobnější diskuzi, zdůvodnění a další informace odkazujeme na citovanou literaturu, zejm. na [24].

2.1 Formální kontext, indukované Galoisovy konexe

Definice 1. ***(Formální) kontext*** *je trojice $\langle X, Y, I\rangle$, kde I je binární relace mezi množinami X a Y.*

Prvky množiny X, resp. Y, se nazývají objekty, resp. atributy. Fakt $\langle x, y\rangle \in I$ interpretujeme tak, že objekt x má atribut y. Formální kontext tedy reprezentuje výše zmíněná tabulková objekt-atributová data.

Každý kontext $\langle X, Y, I\rangle$ indukuje zobrazení $^{\uparrow} : 2^X \to 2^Y$ a $^{\downarrow} : 2^Y \to 2^X$ předpisem

$$A^{\uparrow} = \{y \in Y \mid \text{pro každý } x \in A : \langle x, y\rangle \in I\} \tag{1}$$

pro $A \subseteq X$ a

$$B^{\downarrow} = \{x \in X \mid \text{pro každý } y \in B : \langle x, y\rangle \in I\} \tag{2}$$

pro $B \subseteq Y$. Místo $A^{\uparrow}$ píšeme také $A^{\uparrow_I}$, popř. A^I, podobně pro $B^{\downarrow}$.

Poznámka 1. $A^{\uparrow}$ je tedy množina všech atributů společných všem objektům z A; $B^{\downarrow}$ je množina všech objektů, které sdílejí všechny atributy z B.

Definice 2. *Zobrazení $f : 2^X \to 2^Y$ a $g : 2^Y \to 2^X$ tvoří tzv. Galoisovu konexi mezi množinami X a Y, pokud pro $A, A_1, A_2 \subseteq X$ a $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ platí $A_1 \subseteq A_2$ implikuje $f(A_2) \subseteq f(A_1)$; $B_1 \subseteq B_2$ implikuje $g(B_2) \subseteq g(B_1)$; $A \subseteq g(f(A))$; $B \subseteq f(g(B))$.*

Pojem Galoisova konexe byl zaveden a studován v [42], viz také [16].

Věta 1. *Pro binární relaci $I \subseteq X \times Y$ tvoří indukovaná zobrazení ${}^{\uparrow_I}$ a ${}^{\downarrow_I}$ Galoisovu konexi mezi X a Y. Naopak, tvoří-li f a g Galoisovu konexi mezi X a Y, existuje binární relace $I \subseteq X \times Y$ tak, že $f = {}^{\uparrow_I}$ a $g = {}^{\downarrow_I}$. Tím je dán vzájemně jednoznačný vztah mezi Galoisovými konexemi mezi X a Y a binárními relacemi mezi X a Y.*

Poznámka 2. Definiční podmínky Galoisových konexí jsou přirozené a i v běžném životě známé. Např. podmínka "$A_1 \subseteq A_2$ implikuje $A_2^{\uparrow} \subseteq A_1^{\uparrow}$" byla v Port-Royalské škole známá jako zákon obráceného poměru rozsahů a obsahů (čím více objektů, tím méně společných vlastností).

2.2 Formální koncepty, konceptuální svaz

Definice 3. ***(Formální) koncept*** *v kontextu $\langle X, Y, I\rangle$ je dvojice (A, B), kde $A \subseteq X$ a $B \subseteq Y$ jsou takové, že $A^{\uparrow} = B$ a $B^{\downarrow} = A$.*

Poznámka 3. Formální koncept je tedy dvojice sestávající z množiny A objektů i množiny B atributů takových, že B jsou právě všechny atributy společné objektům z A a A jsou právě všechny objekty sdílející atributy z B (viz Sekce 1). Z matematického pohledu je koncept právě pevným bodem Galoisovy konexe dané ${}^{\uparrow}$ a ${}^{\downarrow}$.

Množinu všech formálních konceptů v $\langle X, Y, I\rangle$ značíme $\mathcal{B}(X, Y, I)$, tj.

$$\mathcal{B}(X, Y, I) = \{(A, B) \mid A \subseteq X,\ B \subseteq Y,\ A^{\uparrow} = B, B^{\downarrow} = A\}.$$

Definice 4. ***Konceptuální svaz*** *je množina $\mathcal{B}(X, Y, I)$ spolu s relací $\leq$ definovanou na $\mathcal{B}(X, Y, I)$ předpisem*

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \quad \textit{právě když} \quad A_1 \subseteq A_2 \ (\textit{nebo, ekvivalentně, } B_2 \subseteq B_1).$$

Pro další účely označíme $\mathrm{Int}(I) = \{B \subseteq Y \mid \langle A, B\rangle \in \mathcal{B}(X, Y, I)$ pro nějakou $A \subseteq X\}$, tj. $\mathrm{Int}(I)$ je množina obsahů všech konceptů z $\mathcal{B}(X, Y, I)$. Platí, že $B \subseteq Y$ je obsahem nějakého konceptu z $\mathcal{B}(X, Y, I)$. Podobně značíme $\mathrm{Ext}(I)$ rozsahy konceptů z $\mathcal{B}(X, Y, I)$.

Poznámka 4. Relace $\leq$ je tedy relací podpojem-nadpojem (viz Sekce 1).

Následující věta, tzv. hlavní věta o konceptuálních svazech, popisuje strukturu $\mathcal{B}(X,Y,I)$. Mimo jiné zdůvodňuje název konceptuální svaz.

Věta 2 (hlavní věta o konceptuálních svazech). *Mějme formální kontext $\langle X,Y,I\rangle$. (1) $\mathcal{B}(X,Y,I)$ je vzhledem k $\leq$ úplný svaz, ve kterém jsou infima a suprema dána předpisy*

$$\bigwedge_{j\in J}\langle A_j,B_j\rangle = \left\langle \bigcap_{j\in J} A_j, (\bigcap_{j\in J} A_j)^{\uparrow}\right\rangle = \left\langle \bigcap_{j\in J} A_j, (\bigcup_{j\in J} B_j)^{\downarrow\uparrow}\right\rangle, \tag{3}$$

$$\bigvee_{j\in J}\langle A_j,B_j\rangle = \left\langle (\bigcap_{j\in J} B_j)^{\downarrow}, \bigcap_{j\in J} B_j\right\rangle = \left\langle (\bigcup_{j\in J} A_j)^{\uparrow\downarrow}, \bigcap_{j\in J} B_j\right\rangle. \tag{4}$$

(2) Daný úplný svaz $\mathbf{V}=\langle V,\sqsubseteq\rangle$ je izomorfní s $\mathcal{B}(X,Y,I)$, právě když existují zobrazení $\gamma: X\to V$, $\mu: Y\to V$, pro která je $\gamma(X)$ supremálně hustá v $\mathbf{V}$, $\mu(Y)$ infimálně hustá v $\mathbf{V}$ a $\langle x,y\rangle\in I$ platí právě když $\gamma(x)\leq\mu(y)$ (pro každé $x\in X$, $y\in Y$).

Říkáme, že množina $K\subseteq V$ je supremálně hustá v $\mathbf{V}$, právě když pro každý $v\in V$ existuje $K_v\subseteq K$ tak, že v je supremem množiny K_v; podobně pro infimální hustotu.

2.3 Atributové implikace

(Atributová) implikace (nad množinou Y atributů) je výraz tvaru $A\Rightarrow B$, kde $A,B\subseteq Y$.

Definice 5. *Pro implikaci $A\Rightarrow B$ a množinu $C\subseteq Y$ říkáme, že $A\Rightarrow B$ **platí** v C, popř. že C je **modelem** $A\Rightarrow B$, jestliže platí, že pokud $A\subseteq C$, pak i $B\subseteq C$. Obecněji, pro množinu $\mathcal{M}\subseteq 2^Y$ množin atributů a množinu $T=\{A_j\Rightarrow B_j \mid j\in J\}$ implikací říkáme, že T platí v $\mathcal{M}$, popř. že $\mathcal{M}$ je modelem T, jestliže $A_j\Rightarrow B_j$ platí v C pro každé $C\in\mathcal{M}$ a $A_j\Rightarrow B_j\in T$.*

Poznámka 5. (1) Že T platí v $\mathcal{M}$, zapisujeme $\mathcal{M}\models T$ (je-li $\mathcal{M}=\{C\}$, popř. $T=\{A\Rightarrow B\}$, píšeme jen $C\models T$, popř. $\mathcal{M}\models A\Rightarrow B$).

(2) Snadno se vidí, že pojmy atributová implikace, model, a platnost atributové implikace, lze snadno vyjádřit formalismem monadické predikátové logiky: jazyk je dán unárními relačními symboly r_y ($y\in Y$); atributové implikaci $A\Rightarrow B$ odpovídá formule $\varphi(A\Rightarrow B)=\&_{y\in A}r_y(x)\Rightarrow\&_{y\in B}r_y(x)$; množině $\mathcal{M}$ podmnožin množiny Y odpovídá struktura $\mathbf{M}$ pro jazyk daná nosičem $M=\mathcal{M}$, ve které je každý relační symbol r_y interpretován jako množina $r_y^{\mathbf{M}}=\{C\in\mathcal{M}\mid y\in C\}$. Pak $A\Rightarrow B$ platí v $\mathcal{M}$ (ve výše zavedeném smyslu), právě když $\varphi(A\Rightarrow B)$ platí v $\mathbf{M}$ ve smyslu predikátové logiky.

Říkáme, že implikace platí v kontextu $\langle X,Y,I\rangle$ (popř. že je tom implikace kontextu $\langle X,Y,I\rangle$), jestliže platí v systému $\mathcal{M}=\{\{x\}^{\uparrow}\mid x\in X\}$ obsahů všech objekt-konceptů (tj. obsahů konceptů tvaru $\langle \{x\}^{\uparrow\downarrow}, \{x\}^{\uparrow} \rangle$). Dále říkáme, že implikace platí v konceptuálním svazu $\mathcal{B}(X,Y,I)$, jestliže platí v systému $\mathrm{Int}(I)$ všech obsahů.

Věta 3. *Atributová implikace platí v* $\langle X,Y,I \rangle$, *právě když platí v* $\mathcal{B}(X,Y,I)$.

Definice 6. *Implikace* $A \Rightarrow B$ ***(sémanticky) plyne*** *z množiny* T *implikací (zapisujeme* $T \models A \Rightarrow B$*), jestliže* $A \Rightarrow B$ *platí v každé* $C \subseteq Y$*, ve které platí* T*. Množina* T *implikací se nazývá*

- ***uzavřená****, jestliže obsahuje každou implikaci, která z ní plyne;*
- ***neredundantní****, jestliže žádná implikace z* T *neplyne z ostatních (tj. nikdy není* $T - \{A \Rightarrow B\} \models A \Rightarrow B$*).*

Množina T *implikací kontextu* $\langle X,Y,I \rangle$ *se nazývá* ***úplná****, jestliže z ní plyne každá implikace kontextu* $\langle X,Y,I \rangle$*.* ***Báze*** *je úplná a neredundantní množina implikací daného kontextu.*

Poznámka 6. Význam předchozích pojmů je následující. Zajímají-li nás implikace, které ve vstupních datech (tj. v kontextu) platí, nezajímají nás implikace všechny. Zejména nás nezajímají triviální implikace, např. $A \Rightarrow B$, kde $B \subseteq A$, ty můžeme vynechat. Dále je přirozené vynechat ty implikace, které v nějakém přirozeném smyslu plynou z ostatních (proto pojem vyplývání). Při vynechávání bychom měli kontrolovat, zda aktuální množina je stále úplná (tj. všechny implikace z kontextu z ní plynou) a snažit se, aby nebyla redundantní.

Následující tvrzení je důsledkem známého výsledku z teorie relačních databází [40].

Věta 4. *Množina* T *implikací je uzavřená, právě když, pro každé* $A,B,C,D \subseteq Y$ *platí*

1. $A \Rightarrow A \in T$;
2. *pokud* $A \Rightarrow B \in T$*, pak* $A \cup C \Rightarrow B \in T$;
3. *pokud* $A \Rightarrow B \in T$ *a* $B \cup C \Rightarrow D \in T$*, pak* $A \cup C \Rightarrow D \in T$.

V následujícím ukážeme výsledek, který publikovali Guigues a Duquenne [27].

Definice 7. ***Pseudointent*** *kontextu* $\langle X,Y,I \rangle$ *je množina* $A \subseteq Y$*, pro kterou platí, že* $A \neq A^{\downarrow\uparrow}$ *a že* $B^{\downarrow\uparrow} \subseteq A$ *pro každý pseudointent* $B \subset A$.

Věta 5. *Množina*

$$\{A \Rightarrow A^{\downarrow\uparrow} \mid A \text{ je psudointent } \langle X,Y,I \rangle\}$$

implikací je úplná a neredundantní, tj. báze.

2.4 Algoritmy

V souladu s naším zaměřením výkladu FKA se nyní budeme věnovat dvěma problémům, jejichž efektivní algoritmická řešitelnost je klíčová pro možnost použít FKA na rozsáhlejší data. Prvním z nich je problém generování všech konceptů daného kontextu. Druhým je problém generování implikací daného kontextu.

Generování konceptů daného kontextu
Algoritmus, který vygeneruje všechny koncepty daného kontextu, se nabízí přímo z definice: Procházíme všechny podmnožiny A množiny X a pro každou z nich vytvoříme $\langle A^{\uparrow\downarrow}, A^{\uparrow}\rangle$ (což je koncept). Tak sice vytvoříme všechny koncepty (řada z nich však vznikne vícekrát), ale algoritmus má exponenciální časovou složitost (procházíme $2^{|X|}$ podmnožin množiny X).

Poznamenejme, že v nejhorším případě exponenciální trvání algoritmu nutné, neboť počet konceptů daného kontextu může být exponenciální. Je zřejmé, že je vždy $|\mathcal{B}(X,Y,I)| \le 2^{\min(|X|,|Y|)}$. Tohoto odhadu ale může být dosaženo, jak ukazuje příklad kontextu $\langle X, X, \neq\rangle$. Platí totiž, že $(A,B) \in \mathcal{B}(X,X,\neq)$, právě když $A = X - B$, tj. $|\mathcal{B}(X,X,\neq)| = 2^{|X|}$. Ve většině příkladů s kontexty s reálnými daty je ale $|\mathcal{B}(X,Y,I)| \ll 2^{\min(|X|,|Y|)}$.

Algoritmus Next closure Asi nejznámějším algoritmem na generování všech konceptů daného kontextu je algoritmus označovaný jako Next closure. Byl navržen Ganterem [21, 22], viz také [24].

Next closure je vlastně algoritmem na generování všech uzavřených množin uzávěrového operátoru c na konečné množině X. Ten je pak použit na problém generování všech konceptů daného kontextu aplikován následovně. Složené zobrazení ${}^{\uparrow\downarrow} : 2^X \to 2^X$ je uzávěrovým operátorem na X, viz Sekce 3.2. Jeho množina uzavřených množin je právě $\mathrm{Ext}(I)$. Tu lze algoritmem Next closed set vygenerovat. Z ní lze pak snadno spočítat všechny koncepty z $\mathcal{B}(X,Y,I)$, neboť $\mathcal{B}(X,Y,I) = \{\langle A, A^{\uparrow}\rangle \mid A \in \mathrm{Ext}(I)\}$. Proto je někdy Ganterův algoritmus nazýván Next extent.

Přistoupíme k popisu algoritmu Next closure. Předpokládejme, že c je uzávěrový operátor na konečné množině $X = \{1,\dots,n\}$. Pro $A, B \subseteq X$ a $i \in \{1,\dots,n\}$ položme

$$A <_i B \quad \text{právě když} \quad i \in B - A \text{ a } A \cap \{1,\dots,i-1\} = B \cap \{1,\dots,i-1\}.$$

Dále položme

$$A < B \quad \text{právě když} \quad A <_i B \text{ pro nějaké } i.$$

Relace $<$ je tedy obvyklé lexikografické uspořádání podmnožin množiny X. Pro algoritmus je klíčovým následující tvrzení.

Lemma 1. *Nejmenší uzavřená podmnožina A^+ množiny X, která je větší než daná $A \subseteq X$ (vzhledem k $<$) je množina*

$$A^+ = A \oplus i$$

, kde $A \oplus i := c((A \cap \{1,\dots,i-1\}) \cup \{i\})$ a i je největší takový, že $A <_i A \oplus i$.

Algoritmus Next closure začíná s lexikograficky nejmenší uzavřenou podmnožinou X, kterou je $c(\emptyset)$. Dále postupuje tak, že k naposledy vytvořené uzavřené podmnožině $A \subseteq X$ vytvoří na základě Lemma 1 jejího lexikografického následovníka A^+, dokud není $A = X$. Tak vzniknou všechny uzavřené podmnožiny X.

```
A := c(∅);
store(A); while A ≠ X do
  A := A⁺;
  store(A);
endwhile.
```

Generujeme-li algoritmem Next closure množinu $\mathrm{Ext}(I)$, je časová složitost vytvoření A^+ k danému A v $O(|X|^2 \cdot |Y|)$, jeho celková složitost je tedy $O(|X|^2 \cdot |Y| \cdot |\mathcal{B}(X, Y, I)|)$. Algoritmus tedy patří do třídy algoritmů s tzv. polynomial time delay [34].

Next closure má minimální paměťovou náročnost (potřebujeme jen uchovávat kontext, aktuálně generovaný extent a popř. strukturu, do které jsou ukládány vygenerované rozsahy, popř. koncepty). Next closure však negeneruje strukturu konceptuálního svazu (např. informaci o horních a dolních sousedech konceptů).

Algoritmus založený na generování horních sousedů Jako příklad algoritmu, který kromě všech konceptů generuje i strukturu konceptuálního svazu uvedeme algoritmus navržený Lindigem [37]. Algoritmus začíná nejmenším konceptem (tím je $(\emptyset^{\uparrow\downarrow}, \emptyset^{\uparrow})$). Dále pokračuje tím, že ke každému konceptu generuje jeho horní sousedy v konceptuálním svazu. Generování horních sousedů je založeno na následujícím tvrzení.

Lemma 2. *Nechť $(A, B) \in \mathcal{B}(X, Y, I)$ není největší koncept. Pak $(A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow}$, kde $x \in X - A$, je rozsahem horního souseda (A, B), právě když pro každý $z \in (A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow} - A$ je $(A \cup \{x\})^{\uparrow\downarrow} = (A \cup \{z\})^{\uparrow\downarrow}$.*

Následující algoritmus vypočítá (a uloží do proměnné neighbors) všechny horní sousedy daného konceptu $(A, B) \in \mathcal{B}(X, Y, I)$.

```
min:=X − A;
neighbors:=∅;
for x ∈ X − A do
  B₁ := (A ∪ {x})↑;  A₁ := B₁↓;
  if (min∩((A₁−A)−{x}) = ∅) then neighbors:=neighbors∪{(A₁, B₁)}
  else min:=min−{x};
enddo.
```

Algoritmus pracuje tak, že počínaje nejmenším konceptem počítá ke každému konceptu jeho horní sousedy. Koncepty se přitom ukládají do vyhledávacího stromu, ke konceptům se ukládají seznamy jejich horních a dolních sousedů. Ukládání do vyhledávacího stromu se provádí, protože koncepty je nutné vyhledávat kvůli detekci společných horních sousedů, a tedy správné reprezentaci konceptuálního svazu. Časová složitost popisovaného algoritmu je $O(|X|^2 \cdot |Y| \cdot |\mathcal{B}(X, Y, I)|)$, stejně jako u algoritmu Next closure. Další detaily je možné najít v [37].

Další algoritmy na generování konceptů Byla navržena řada dalších algoritmů na generování konceptů a konceptuálních svazů. Dobrý přehled včetně některých jejich vylepšení a experimentálního porovnání jejich výkonnosti lze nalézt v [36].

Generování implikací daného kontextu
Ukážeme jen, jak generovat bázi implikací popsanou ve Větě 5. Potřebujeme následující tvrzení.

Lemma 3. *Množina všech podmnožin množiny Y, které jsou obsahy nebo pseudointenty v $\langle X, Y, I\rangle$, tvoří uzávěrový systém.*

Příslušný uzávěrový operátor c je dán předpisem

$$c(A) = A^{*} \cup A^{**} \cup A^{***} \cup \cdots,$$

kde $A^{*} = A \cup \bigcup\{C \mid B \Rightarrow C \in T,\ B \subseteq A, B \neq A\}$ a T je množina všech implikací kontextu $\langle X, Y, I\rangle$. K výpočtu všech pseudointentů lze použít algoritmus Next Closure (ten generuje všechny obsahy a pseudointenty, obsahy vynecháme). K použití algoritmu Next Closure je třeba vyřešit problém množiny T všech implikací platných v daném kontextu, která je použita v popisu zmíněného uzávěrového operátoru. Lze však ukázat, že je možné postupovat tak, že začneme z prázdnou množinou T, kterou postupně rozšiřujeme a to tak, že vypočítáme-li pseudointent D, přidáme do T implikaci $D \Rightarrow D^{\downarrow\uparrow}$.

2.5 Vícehodnotové kontexty a konceptuální škálování

Vícehodnotové kontexty (many-valued contexts) jsou rozšířením formálních kontextů, které umožňuje reprezentovat vstupní data i s jinými atributy než jen s bivalentními logickými atributy.

Definice 8. ***Vícehodnotový kontext*** *je čtveřice $\langle X, Y, W, I\rangle$, kde $I \subseteq X \times Y \times W$ je ternární relace taková, že pokud $\langle x, y, v\rangle \in I$ a $\langle x, y, w\rangle \in I$, pak $v = w$.*

Prvky množin X, Y a W se nazývají objekty, (vícehodnotové) atributy a hodnoty atributů. Fakt $\langle x, y, w\rangle \in I$ znamená, že objekt x má atribut y s hodnotou w, píšeme také $y(x) = w$. Uvažujme Tab. 4 nahoře. Tabulka reprezentuje vícehodnotový kontext. Atributy y_1, y_2, y_4 nabývají jen hodnot 0 a 1 a tyto atributy jsou tedy bivalentní logikcé. Atribut y_3 nabývá pro objekty x_1, x_2, x_3 postupně hodnot $2, 15, 95$. Vícehodnotové kontexty zřejmým způsobem rozšiřují základní kontexty. FKA přistupuje k analýze vícehodnotových kontextů následovně. Vícehodnotový kontext je prostřednictvím vhodného tzv. **konceptuálního škálování** (conceptual scaling) převeden na základní kontext, který je poté analyzován. Příklad je uvedený v Tab. 4.

Definice 9. ***Škála*** *(scale) pro atribut y vícehodnotového kontextu je kontext $S_y = \langle X_y, Y_y, I_y\rangle$, pro který $y(X) \subseteq X_y$ (kde $y(X) = \{y(x) \mid x \in X\}$) . Prvky množin X_y a Y_y se nazývají škálové hodnoty a škálové atributy.*

Tabulka 4. Vícehodnotový kontext (nahoře) a jemu odpovídající kontexty vytvořené aplikacemi konceptuálního škálování pomocí škál z Tab. 5.

	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	1	2	0
x_2	0	1	15	0
x_3	0	0	95	1

	y_1	y_2	y_{0-20}	y_{21-100}	y_{101-}	y_4
x_1	1	1	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0	0	0
x_3	0	0	0	1	0	1

	y_1	y_2	y_{0-20}	y_{21-100}	y_{101-}	y_4
x_1	1	1	1	0	0	0
x_2	0	1	1	0	0	0
x_3	0	0	1	1	0	1

Jako škálu pro daný atribut vícehodnotového kontextu můžeme použít libovolný kontext splňující podmínky definice. Nicméně šáklad by měla odrážet význam daného atributu. Pro atributy, které se ve vícehodnotových kontextech běžně vyskytují, je k dispozici řada standardních škál (např. nominální, ordinální, interordinální, biordinální, dichotomická, atd., viz např. [24]).

Dvě možné škály pro atribut y_3 z kontextu v Tab. 4 nahoře jsou uvedeny v Tab. 5 (obě mají stejné množiny atributů, což tak být nemusí).

Tabulka 5. Dvě škály pro atribut y_3 vícehodnotového kontextu z Tab. 4 nahoře.

	y_{0-20}	y_{21-100}	y_{101-}
x_1	1	0	0
x_2	1	0	0
x_3	0	1	0

	y_{0-20}	y_{21-100}	y_{101-}
x_1	1	0	0
x_2	1	0	0
x_3	1	1	0

Popíšeme nyní tzv. jednoduché škálování (plain scaling), které je základní procedurou předevedí vícehodnotového kontextu na základní kontext.

Definice 10. *Je-li $\langle X, Y, W, I\rangle$ vícehodnotový kontext a jsou-li S_y $(y \in Y)$ škály, pak* ***kontext odvozený jednoduchým škálováním*** *je kontext $\langle X, Z, J\rangle$, kde*

- $N = \bigcup_{y\in Y} \dot{Y}_y$ $(\dot{Y}_y = \{y\} \times Y_y)$;
- $\langle x, \langle y, z\rangle\rangle \in J$ *právě když* $y(x) = w$ *a* $\langle w, z\rangle \in I_y$.

Objekty odvozeného kontextu jsou tedy shodné s objekty vícehodnotového kontextu a množina atributů odvozeného kontextu je disjunktním sjednocením atributů jednotlivých škál. Operaci jednoduchého škálování je možné popsat následovně: v tabulce se označení řádků nemění, místo sloupce s označením y vložíme $|Y_y|$ sloupců označených atributy z Y_y a každou hodnotu $y(x)$ z vícehodnotového kontextu nahradíme řádkem škály S_y příslušným objektu x.

2.6 Další teoretické základy

Zmiňme se stručně o dalších teoretických základech FKA, zejména o výsledcích, které jsou přímo motivovány úlohami, které se v analýze dat objevují.

Důležitou oblastí je studium **významných částí** konceptuálního svazu a jejich popisu prostřednictvím formálního kontextu. V [24] je tento problém studován zejména prostřednitvím tzv. kompatibilních a uzavřených podkontextů daného kontextu. Další oblastí je zjednodušování konceptuálních svazů procesem **faktorizace**. Poznamenejme, že konceptuální svazy je možné faktorizovat jednak tzv. kongruencemi (tj. kompatibilními ekvivalencemi), jednak tzv. kompatibilními tolerancemi (ty nemusí být tranzitivní). **Dekompozice a kompozice konceptuálních svazů** představují další významnou oblast. Je motivována potřebou přehledně rozložit konceptuální svaz na jednodušší strutury a umět z jednodušších struktur skládat složitější. Používanými technikami jsou tzv. subdirektní rozklady a konstrukce, atlasové rozklady, substituce, tenzorové rozklady a konstrukce, a slepování.

3 Historie a styčné body

3.1 Historie

Základní teoretické pojmy používané ve FKA studovali Birkhoff [16], Ore [42] a další. Už Birkhoff viděl v těchto pojmech prostředky užitečné nejen pro samotnou matematiku. Mezi první práce o použití uvedených struktur v analýze dat patří [2, 3]. Poznamenejme, že hlavně ve francouzsky mluvící komunitě se místo názvu konceptuální svaz používá často název Galoisův svaz (Galois lattice). Za hlavní tvůrce FKA je považován Rudolf Wille (TH Darmstadt), který v oblasti teoretických a metodických základů formální konceptuální analýzy a konceptuálních svazů pracuje více než 20 let. Jeho první prací je dnes klasická [51], která obsahuje mnoho užitečných informací a pohledů. Wille se zabýval konceptuálními svazy v rámci svého programu tzv. restruktiralizace teorie svazů. Citujme z [51]:

> "The approach to lattice theory outlined in this paper is based on an attempt to reinvigorate the general view of order. For this purpose we go back to the origin of lattice concept in nineteenth-century attempts to formalize logic, where the study of hierarchies of concepts played a central role (cf. Schröder [46]). ... In set-theoretical language, this gives rise to lattices whose elements correspond to the concepts ... and whose order comes from the hierarchy of concepts."

Teoretické základy FKA jsou popsány v monografii [24]. Příspěvky k FKA a konceptuálním svazům je možné najít v různých matematických (zejm. algebraických), informatických a inženýrských časopisech, jsou přednášeny na různých konferencích, zejm. však tradičně na konferenci General Aplgebra and Its Applications a nověji na konferenci Conceptual Structures (sborník vychází v Lecture Notes in Artificial Intelligence) a různých konferencích o analýze dat.

3.2 Matematické struktury

Jak bylo uvedeno výše, základní teoretické pojmy, na kterých je FKA založena, jsou pojmy **Galoisova konexe** a **úplný svaz**. Dalším souvisejícím pojmem je pojem **uzávěrový operátor** v množině X, což je zobrazení $c : 2^X \to 2^X$, pro který platí $A \subseteq c(A)$; $A \subseteq B$ implikuje $c(A) \subseteq c(B)$; $c(A) = c(c(A))$. Platí, že složené zobrazení $^{\uparrow\downarrow}$ je uzávěrovým operátorem v X a $^{\downarrow\uparrow}$ je uzávěrovým operátorem v Y. Naopak, ke každému uzávěrovému operátoru c v X existuje formální kontext $\langle X, Y, I\rangle$ tak, že c je právě složeným zobrazením $^{\uparrow\downarrow}$.

Jak jsme uvedli, každý konceptuální svaz je úplným svazem. Lze ukázat, že ke každému úplnému svazu $\langle V, \leq\rangle$ existuje formální kontext $\langle X, Y, I\rangle$ tak, že $\langle V, \leq\rangle$ a výsledný konceptuální svaz $\mathcal{B}\,(X, Y, I)$ jsou izomorfní (lze vzít $X = Y = V$ a $I = \leq$). Pro obecnou uspořádanou množinu $\langle V, \leq\rangle$ je konceptuální svaz $\mathcal{B}\,(X, Y, I)$ právě tzv. **Dedekind-MacNeilleovým zúplněním** $\langle V, \leq\rangle$.

Je tedy vidět, že teorie konceptuálních svazů významně souvisí a je založena na základních matematických strukturách, které jsou dobře známé. To někdy vede zejména některé matematiky z neznalosti k tvrzení, že teorie FKA je jen přejmenovaná teorie Galoisových konexí a uzávěrových operátorů v tom smyslu, že během vývoje FKA žádné významnější výsledky nevznikly a vše je postavené na výsledcích známých v algebře již dávno. To však není pravda. Např. prostudováním monografie [24] zjistíme, že studium FKA přineslo do samotné teorie svazů a uzávěrových struktur nové výsledky a podněty. Zejména přinesl vývoj FKA řadu problémů a výsledků, které přirozeně vznikají a jsou prakticky motivovány při konceptuální interpretaci pojmů Galoisova konexe, uzávěrový operátor a úplný svaz.

Poznamenejme dále, že samotné konceptuální svazy se v matematice velmi často vyskytují. Zmínili jsme již Dedekind-MacNeillovo zúplnění uspořádané množiny. Další příklad dostaneme, vezmeme-li za X množinu formulí nějakého jazyka, za Y množinu struktur pro ten jazyk a interpretujeme-li $\langle x, y\rangle \in I$ jako formule x platí v y. Pak je např. $^{\uparrow\downarrow}$ operátorem sémantického uzávěru a konceptuální svaz je izomorfní svazu (uzavřených) teorií daného jazyka. Je-li V vektorový prostor konečné dimenze a V^* jeho duální prostor, pak položíme-li $v \perp \varphi$, právě když $\varphi(v) = 0$ ($v \in V$ a $\varphi \in V^*$), je konceptuální svaz $\mathcal{B}\,(V, V^*, \perp)$ svazem všech podprostorů prostoru V.

3.3 Logika a logické modelování, reprezentace znalostí

Jak bylo uvedeno, vychází FKA z tzv. Port-Royalské školy logiky [1]. Logika vycházející z Port-Royal byla až do začátku 20. století hlavním proudem vyučovaným na školách, viz např.[31, 55]. Poznamenejme, že logiku vidí jako skládající se z nauky o pojmech, nauky o soudech a nauky o úsudcích. Wille se koncem 90. let 20. stol. se svými spolupracovníky začal zabývat formalizací této logiky, přičemž teorie konceptuálních svazů je přitom považována za přirozenou formalizaci nauky o pojmech. Za vhodné východisko pro formalizaci nauk o soudech a úsudcích jsou považovány tzv. **konceptuální grafy** J. Sowy [47]. Tak Wille dochází k tzv. **kontextuální logice** [53], viz také [44].

3.4 Data mining, databáze

Explorativní analýza dat je základním cílem FKA. FKA je jednou z mnoha metod, které mohou být použity v tzv. **data mining** [29]. Protože formální koncepty lze nahlížet jako shluky nalezené v objekt-atributových datech, jsou zajímavé souvislosts FKA a metodami **shlukové analýzy** (cluster analysis) dat [20]. Tyto souvislosti jsou však zatím málo prozkoumané, zajímavou v tomto směru je práce [45]. Další oblastí v data mining (která však byla podrobně studována již v 60. letech 20. stol. ve skupině kolem P. Hájka v rámci vývoje metody GUHA), která úzce souvisí s FKA, zejm. s problematikou atributových implikací, je generování tzv. **asociačních pravidel**. O souvislostech pojednává např. práce [38]

3.5 Aplikace

Software pro FKA Dnes existuje několik softwarových produktů, umožňujících FKA dat. Nejznámějšími jsou Toscana, Anaconda, a ConImp a program Diagram pro kreslení konceptuálních svazů. Softwarový balík, který umožňuje FKA základních i fuzzy dat je společně vyvíjen na Katedře informatiky PřF UP v Olomouci a Katedře informatiky FEI VŠB-TU Ostrava.

Aplikační oblasti V literatuře je popsána řada příkladů použití FKA na reálných datech. Vzhledem k omezenému rozsahu článku se omezíme na stručný výčet zajímavých aplikací. FKA byla použita např. v informatice (problémy reinženýrství, znovupoužití a restrukturalizace v softwarovém inženýrství), knihovnictví (struktura textových databází), lékařství (žloutenka dětí), psychologie (vývoj pojmů u dětí), stavebnictví (informační systém o stavebních zákonech a vyhláškách), biologie (vnímání barev).

4 Rozšíření, zejména fuzzy verze

Zatím nejvýznamnějším rozšířením FKA je rozšíření inspirované fuzzy logikou [56]. Pro přístupný úvod do fuzzy logiky, fuzzy množin a jejich aplikací doporučujeme [35]. Základním cílem fuzzy logiky a fuzzy množin je modelování vágnosti jako jisté neurčitosti přítomné v popisu světa člověkem. Základním pojmem je pojem fuzzy množiny. Fuzzy množina v univerzu U je zobrazení $A : U \to L$ (nejčastěji $L = [0, 1]$) přiřazující každému prvku $u \in U$ stupeň $A(u) \in L$, ve kterém prvek u patří do A. Podobně fuzzy relace mezi U a V je zobrazení $R : U \times V \to L$, které prvkům $u \in U$ a $v \in V$ přiřazuje stupeň $R(u, v)$, ve kterém jsou prvky v relaci.

Z pohledu fuzzy logiky jsou pojmy formální kontext a formální koncept nedostatečné. Nezohledňují totiž, že daný objekt může mít daný atribut v nějakém stupni obecně různém od 0 a 1, ani to, že pojmy jsou obvykle vágní, tj. např. objekt patří do extentu daného pojmu v nějakém stupni ne nutně 0 nebo 1. Např. atribut "těžký" je typický fuzzy atribut, tj. daný objekty může být těžký ve stupni např. 0.7. Podobně např. pojem drahá kniha je pojem, jehož rozsah je vágní a je tedy přirozené ho modelovat fuzzy množinou.

Základním předpokladem, který volá po použití fuzzy logiky, je tedy fakt, že řada přirozených situací vede k objekt-atributovým datům s fuzzy atributy. To vede ke zobecnění pojmu kontext.

Definice 11. ***(Formální) fuzzy kontext*** *je trojice $\langle X, Y, I\rangle$, kde X a Y jsou množiny (objektů a atributů) a I je fuzzy relace mezi X a Y.*

Stupeň $I(x, y)$ je interpretován jako stupeň, ve kterém objekt x má atribut y. Existuje několik přístupů k FKA fuzzy dat, jmenujme [6, 9, 17, 33, 43, 48]. V dalším se přidržíme výkladu prezentovaného v [9].

Ve fuzzy logice je třeba zvolit strukturu pravdivostních hodnot, se kterou budeme pracovat (tj. zvolit množinu pravdivostních hodnot a logických operací). Obecnou strukturou je tzv. úplný reziduovaný svaz [49], který je jednou ze základních struktur fuzzy logiky [9, 26, 28, 32]. Pro naše potřeby jen uveďme, že úplný reziduovaný svaz je struktura $\mathbf{L} = \langle L, \otimes, \rightarrow, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$, jejímž nosičem je vhodná množina L pravdivostních hodnot (např. $[0, 1]$ nebo konečný řetězec) a která obsahuje spojku implikace $\rightarrow$ (např. Łukasiewiczova implikace $a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b)$, Gödelova implikace $a \rightarrow b = 1$ pro $a \leq b$; $= b$ pro $a > b$).

Pro daný fuzzy kontext $\langle X, Y, I\rangle$, fuzzy množinu A v X a fuzzy množinu B v Y definujeme fuzzy množinu $A^{\uparrow}$ v Y a $B^{\downarrow}$ v X předpisy

$$A^{\uparrow}(y) = \bigwedge_{x \in X} A(x) \rightarrow I(x, y)$$

a

$$B^{\downarrow}(x) = \bigwedge_{y \in Y} B(y) \rightarrow I(x, y).$$

Tyto definice dobře zobecňují klasický případ (který dostaneme, pokud za $\mathbf{L}$ vezmeme dvouprvkový reziduovaný svaz—ten je douprvkovou Booleovou algebrou klasické logiky): $A^{\uparrow}(y)$ je pravdivostní hodnota tvrzení "y má je sdílen všemi objekty z A", podobně pro $B^{\downarrow}(x)$.

Definice 12. ***(Formální) fuzzy koncept*** *ve fuzzy kontextu $\langle X, Y, I\rangle$ je dvojice (A, B), kde A je fuzzy množina objektů, B je fuzzy množina atributů takových, že $A^{\uparrow} = B$ a $B^{\downarrow} = A$.*

Rozsah A i obsah B fuzzy konceptu může být tedy obecně fuzzy množina, což je ve shodě s intuicí. Označíme-li $\mathcal{B}(X, Y, I)$ množinu všech fuzzy konceptů v $\langle X, Y, I\rangle$ a vybavíme-li ji relací $\leq$ (podpojem-nadpojem) definovanou jako v klasickém případě, tj.

$$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \quad \text{právě když} \quad A_1 \subseteq A_2 \text{ (nebo, ekvivalentně, } B_2 \subseteq B_1),$$

(zde ovšem $A_1 \subseteq A_2$ znamená, že $A_1(x) \leq A_2(x)$ pro každý $x \in X$) dostaneme tzv. **fuzzy konceptuální svaz**. Strukturu fuzzy konceptuálních svazů popisuje následující věta, která zobecňuje hlavní větu o konceptuálních svazech z fuzzy puhledu.

Věta 6. *Mějme formální fuzzy kontext* $\langle X, Y, I\rangle$. *(1)* $\mathcal{B}(X, Y, I)$ *je vzhledem k* $\leq$ *úplný svaz, ve kterém jsou infima a suprema dána jako v (3) a (4). (2) Daný úplný svaz* $\mathbf{V} = \langle V, \sqsubseteq\rangle$ *je izomorfní s* $\mathcal{B}(X, Y, I)$*, právě když existují zobrazení* $\gamma : X \times L \to V$, $\mu : Y \times L \to V$*, pro která je* $\gamma(X \times L)$ *supremálně hustá v* $\mathbf{V}$, $\mu(Y \times L)$ *infimálně hustá v* $\mathbf{V}$ *a* $a \otimes b \leq I(x, y)$ *platí právě když* $\gamma(x, a) \leq \mu(y, b)$ *(pro každé* $x \in X$, $y \in Y$, $a, b \in L$*).*

Obecnější charakterizace fuzzy konceptuálních svazů z hlediska fuzzy uspořádání podpojem-nadpojem je možné najít v [10]. Poznamenejme však, že jak bylo ukázáno v [11], je svazové fuzzy uspořádání jednoznačně určeno jeho "ostrou částí" (kterou je v našem případě výše zavedená relace podpojem-nadpojem), a proto se na ni můžeme beze ztrát omezit.

Nyní stručně zmíníme některé další výsledky o fuzzy konceptuálních svazech, zejm. ty, které odpovídají na přirozené otázky ve fuzzy pojetí. Práce [5] studuje relace podobnosti ve fuzzy konceptuálních savzech a ukazuje parametrizovatelnou metodu faktorizace fuzzy konceptuálního svazu podle podobnosti (fuzzy koncepty, které jsou podobné v alespoň předepsaném stupni, se dají k sobě). Práce [8] ukazuje, jak je možné zmenšením struktury pravdivostních hodnot (které odpovídá "zhrubnutí" pohledu na data) dospět k menšímu fuzzy konceptuálnímu svazu (ten je opět faktorizací původního). Práce [14] se věnuje problému citlivosti výsledného fuzzy konceptuálního svazu na pravdivostní hodnoty uvedené v objekt-atributové tabulce (které faktory jsou při vyplňování objekt-atributové tabulky z hlediska výsledného fuzzy konceptuálního svazu důležité?). Práce [13] je věnována algoritmům pro generování všech fuzzy konceptů. Práce [15] ukazuje, že za určitých okolností může být zajímavé vybrat jen některé fuzzy koncepty (výsledný konceptuální svaz je pak menší)a ukazuje jak. Další výsledky je možné najít v [9].

Další zajímavá rozšíření základních konceptuálních svazů byla popsána v [19].

5 Perspektivy a problémy

FKA nabízí řadu otevřených problémů. V poslední době, zejména díky zájmu o data mining, se FKA těší vzrůstajícímu zájmu. Zmíníme se o jednom aspektu, který podle nás sám o sobě nabízí zajímavé problémy. FKA byla dlouho vyvíjena jako matematická metoda s "čistě" algebraickým základem. Např. kniha [24] popisující teoretické základy metody neobsahuje žádnou heuristiku, žádnou metodu, která by vedla ke stručnějšímu popisu výsledného konceptuálního svazu. To je v protikladu s faktem, že výsledný konceptuální svaz, narozdíl od řady metod data mining, neposkytuje zestručnělý popis vstupních dat. Konceptuální svaz je zpravidla mnohem rozsáhlejší než vstupní kontext a obsahuje o kontextu všechnu informaci (kontext lze z konceptuálního svazu zrekonstruovat). Zajímavým problémem, který se v této souvislosti nabízí, je vývoj metod, které by poskytovaly o konceptuálním svazu, popř. jeho částech, stručnou informaci mentálně uchopitelnou člověkem.

Rozsáhlá data Tento problém vyvstává zejména, pokud vstupní formální kontext je rozsáhlý. Zajímavým přístup byl popsán v [18]. Jiný přístup, založený na výběru jen těch konceptů, které jsou v jistém smyslu kompatibilní s dodatečnou informací (např. o důležitosti atributů), byl navržen v [12].

Neurčitost, statistické metody Problematika neurčitosti ve FKA byla studována zejména v souvislosti s fuzzy přístupem ke konceptuální analýze (viz výše). Přirozeně se nabízí možnost modifikovat metody FKA pro jiné typy neurčitosti než vágnost (fuzzy). Velmi zajímavou možností se zdá být pokusit se ve FKA použít statistický přístup k problému redukce dat, např. metody redukce počtu proměnných (hlavní komponenty apod.).

Reference

1. Arnauld A., Nicole P.: *La logique ou l'art de penser.* Paris, 1662.
2. Barbut M.: Note sur l'algèbre des techniques d'analyse hiérarchique. In: Matalon B. (Ed.): *L'analyse hiérarchique.* Gauthier-Villars, Paris, 1965, pp. 125–146.
3. Barbut M., Monjardet B.: *Ordre et Classification, Vol. 2.* Hachette, Paris, 1970.
4. Bělohlávek R.: Fuzzy Galois connections. *Math. Logic Quarterly* **45**,4 (1999), 497–504.
5. Bělohlávek R.: Similarity relations in concept lattices. *J. Logic and Computation* Vol. **10** No. 6(2000), 823–845.
6. Bělohlávek R.: Fuzzy Galois connections and fuzzy concept lattices: from binary relations to conceptual structures. In: Novák V., and Perfilieva I., (eds.), *Discovering the World with Fuzzy Logic,* pp. 462-494. Physica-Verlag, Heidelberg and New York, 2000.
7. Bělohlávek R.: Reduction and a simple proof of characterization of fuzzy concept lattices. *Fundamenta Informaticae* **46**(4)(2001), 277–285.
8. Bělohlávek R.: Logical precision in concept lattices. *J. Logic and Computation,* **12**(6)(2002), 137–148.
9. Bělohlávek R.: *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles.* Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2002.
10. Bělohlávek R.: Concept lattices and order in fuzzy logic. *Annals of Pure and Applied Logic* (to appear).
11. Bělohlávek R.: Lattice-type fuzzy order is uniquely given by its 1-cut: proof and consequences. *Fuzzy Sets and Systems* (to appear).
12. Bělohlávek R., Sklenář V., Zacpal J.: Formal concept analysis with hierarchically ordered attributes. *Int. J. General Systems* (to appear).
13. Bělohlávek R.: Getting maximal rectangular submatrices from [0,1]-valued object-attribute tables: algorithms for fuzzy concept lattices (submitted). Preliminary version appeared in *Proc. Fourth Int. Conf. on Recent Advances in Soft Computing.* Nottingham, United Kingdom, 12-13 December, 2002, pp. 200–205.
14. Bělohlávek R.: Invariance to scaling in formal concept analysis of data with fuzzy attributes (submitted).
15. Bělohlávek R., Sklenář V., Zacpal J.: Crisply generated formal concepts in object-attribute data (preprint).
16. Birkhoff G.: *Lattice Theory, 3-rd edition.* AMS Col. Publ. 25, Providence, R. I., 1967.

17. Burusco A., Fuentes-Gonzáles R.: *The study of the L-fuzzy concept lattice.* Mathware & Soft Computing **3**(1994), 209–218.
18. Cole R., Eklund P., Groh B.: Dealing with large contexts in formal concept analysis: a case study using medical texts (preprint).
19. Diday E., Emilion R.: Maximal and stochastic Galois lattices. *Discrete Appl. Math.* **127**(2003), 271–284.
20. Everitt, B. S.: *Cluster Analysis, 4th ed.* Edward Arnold, 2001.
21. Ganter B.: Two basic algorithms in concept analysis. FB-Preprint No. 831, TH Darmstadt, 1984.
22. Ganter B.: Algorithmen zur formalen Begriffsanalyse. In [25], pp. 241–254.
23. Ganter B.: *Lattice theory and formal concept analysis—a subjective introduction.* Preprint MATH-AL-2-1994, Techical University Dresden, Dresden, 1994.
24. Ganter B., Wille R.: *Formal concept analysis: Mathematical Foundations.* Springer, 1999.
25. Ganter B., Wille R., Wolff K. E.: *Beiträge zur Begriffsanalyse.* B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1987.
26. Goguen J. A.: The logic of inexact concepts. *Synthese* **19**(1968–69), 325–373.
27. Guigues J.-L., Duquenne V.: Familles minimales d'implications informatives resultant d'un tableau de données binaires. *Math. Sci. Humaines* **95**(1986), 5–18.
28. Hájek P.: *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordrecht, 1998.
29. Hand D. J., Mannila H., Smyth P.: *Principles of Data Mining.* MIT Press, 2001.
30. von Hentig H.: *Magier oder Magister? Über die Einheit der Wissenschaft im Verständigungsprocess.* Klett, Stuttgart, 1972.
31. Höfler A.: *Grundlehren der Logik ung Psychologie.* G. Freytag, Leipzig, 1906.
32. Höhle U.: *On the fundamentals of fuzzy set theory. J. Math. Anal. Appl.* **201**(1996), 786–826.
33. Jaoua, S. Elloumi, S. Ben Yahia, and F. Alvi: Galois connection in fuzzy binary relations: applications for discovering association rules and decision making. In: J. Desharnais, M. Frappier, and W. McCaoul (Eds.): *Proc. 5th Int. Conf. Relational Methods in Computer Science: The Québec Seminar.* Methodos Publishers, 2002, pp. 85–112.
34. Johnson D. S., Yannakakis M., Papadimitrou C. H.: On generating all maximal independent sets. *Inf. Processing Letters* **27**(1988), 129–133.
35. Klir G. J., Yuan B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.* Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
36. Kuznetsov S. O., Obiedkov S. A.: Comparing performance of algorithms for generating concept lattices. *J. Experimental & Theoretical Artificial Intelligence* **14**(2003), 189–216.
37. Lindig C.: Fast concept analysis. Preprint.
38. Lopes S., Petit J.-M., Lakhal L.: Functional and approximate dependency mining: database and FCA points of view. *J. Experimental & Theoretical Artificial Intelligence* **14**(2003), 93–114.
39. Lukose D., Delugach H., Keeler M., Searle L., Sowa J. (Eds.): *Conceptual Structures: Fulfilling Peirce's Dream.* Proc. of Fifth Int. Conf. on Conceptual Structures, ICCS'97. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1997.
40. Maier D.: *The Theory of Relational Databases.* Computer Science Press, Rockville, 1983.
41. Novák V.: *Fuzzy Sets and Their Applications.* Adam–Hilger, Bristol, 1989.
42. Ore O.: Galois connexions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **55**(1944), 493–513.
43. Pollandt S.: *Fuzzy Begriffe.* Springer, Berlin, 1997.

44. Prediger S.: *Kontextuelle Urteilslogik mit Begriffsgraphen.* Shaker Verlag, Darmstadt, 1998.
45. Rice M. D., Siff M.: Clusters, concepts, and pseudometrics (preprint).
46. Schröder E.: *Algebra der Logik I, II, III.* Leipzig, 1890, 1891, 1895.
47. Sowa J. F.: *Conceptual Structures: Information Processing in Mind and Machine.* Addison-Wesley, Reading, MA, 1984.
48. Vojtáš P., Snášel V.: Formal concept analysis of fuzzy relations. *Kybernetika* (submitted).
49. Ward M., Dilworth R. P.: Residuated lattices. *Trans. Amer. Math. Soc.* **45**(1939), 335–354.
50. Wille R.: Versuche der Restrukturierung von Mathematik am Beispiel der Grundvorlesung "Lineare Algebra". In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Schrödel, 1981.
51. Wille R.: Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts. In: I. Rival (Ed.): *Ordered Sets.* 445–470, Reidel, Dordrecht-Boston, 1982.
52. Wille R.: Concept lattices and conceptual knowledge systems. *Computers and Mathematics with Applications* **23**(1992), 493-515.
53. Wille R.: *Conceptual graphs and formal concept analysis.* In [39], pp. 290–303.
54. Winston P. H.: *Artifical Intelligence. 3-rd Ed.* Addison Wesley, 1992.
55. Zába G.: *Logika.* (Logic, in Czech) Hejda & Tuček, Praha, 1906.
56. Zadeh L.: Fuzzy sets. *Information and Control* **8**(3)(1965), 338–353.