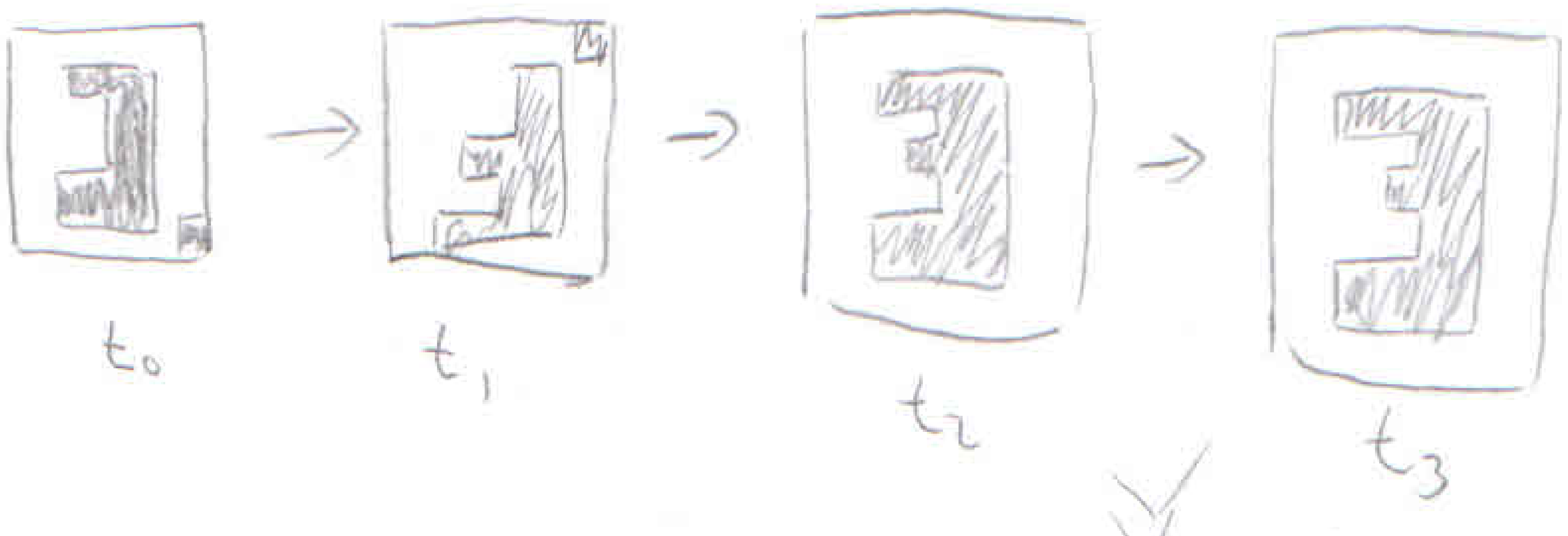
- sítě inspirované jevem asociace (vidíme porušený vzor, vybaví se nám správný, celý vzor; vidíme vzor A, vybaví se nám s ním asociovaný vzor B)

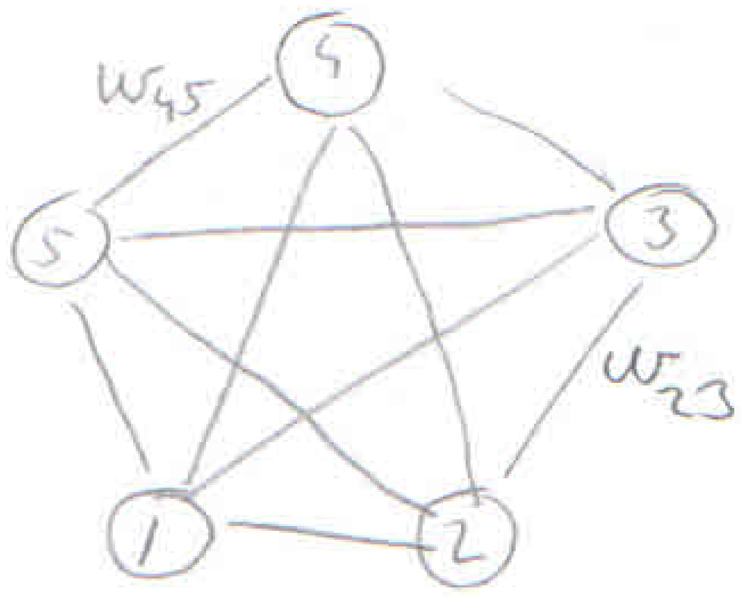
- asociace př.:



nalezen asociovaný vzor (stabilní bod)

(Amari-)Hopfieldova síť

- základní model asociativní sítě (J. Hopfield 1982)
- n neuronů úplně propojených
- symetrické váhy: $w_{ij} = w_{ji}$
- $w_{ii} = 0$
- stav neuronu $x_i \in \{-1, 1\}$, popř. $x_i = \{0, 1\}$



- aktivační dynamika:

$$x_i(t+1) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \sum_{j=1}^{N} x_j(t) \cdot w_{ij} > 0 \ (\text{popř. } \theta_i) \\ x_i(t) & \text{— '' —} = 0 \\ -1 & \text{— '' —} < 0 \end{cases}$$

práh neuronu i

2 možné režimy

a) aktualizace vždy 1 neuronu v daném čase t; stanoveno pořadí neuronů, např. $1, 2, 3, \dots, n, 1, 2, 3, \dots$
↳ považováno za realističtější
↳ asynchronní

b) synchronní: v čase t se aktualizují všechny neurony najednou
↳ může cyklit: $\overset{1}{\circ}\overset{w=1}{—}\overset{-1}{\circ} \to \overset{-1}{\circ}\overset{1}{—}\overset{1}{\circ} \to \overset{1}{\circ}\overset{1}{—}\overset{-1}{\circ} \to$ atd.

Každé Hopfieldově síti je přiřazena funkce energie, která je sama o sobě užitečná;
ve stavu $\mathbb{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n$
je fce energie $E(\mathbb{x})$ def.: — pozn.: stav je stabilní, pokud síť v tomto stavu nemění hodnotu x_i, tj. $\mathbb{x}(t+1) = \mathbb{x}(t)$

$$E(\mathbb{x}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j$$

Lemma $E(\mathbb{x}(t))$ je vzhledem k t nerostoucí. Navíc dojde-li ke změně stavu, tj. $\mathbb{x}(t+1) \neq \mathbb{x}(t)$, pak $E(\mathbb{x}(t+1)) < E(\mathbb{x}(t))$.

Důkaz: Předp., že v čase $t+1$ se aktualizuje hodnota neuronu i^* a dojde ke změně x_{i^*}. Pak

$$E(\mathbb{x}(t)) - E(\mathbb{x}(t+1)) = -\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{i^*}(t) x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{i^*}(t+1) x_j(t+1) =$$

$$= -x_{i^*}(t) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i^*}}^{n} w_{ij} x_j(t) + x_{i^*}(t+1) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i^*}}^{n} w_{ij} \underbrace{x_j(t+1)}_{= x_j(t)} =$$

$$= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i^*}}^{n} w_{ij} x_j(t) \cdot \left[x_{i^*}(t+1) - x_{i^*}(t) \right] > 0$$

pro $x_{i^*}(t) = -1$ a $x_{i^*}(t+1) = 1$ je $\sum w_{ij} x_j(t) > 0$

pro $x_{i^*}(t) = 1$ a $x_{i^*}(t+1) = -1$ je $\sum w_{ij} x_j(t) < 0$

$\square$

Věta Pro libovolné nastavení vah $w_{ij} \in \mathbb{R}$ a lib. počáteční stav $\mathbb{x}(0) \in \{-1, 1\}^n$ se síť po konečném počtu kroků dostane do stabilního stavu.

Důkaz: E zřejmě nabývá konečného počtu hodnot (max. 2^n).

Tvrzení plyne z Lemma (každá změna znamená snížení hodnoty E, tu nelze snižovat do nekonečna). $\square$

Věta $\mathbb{x}$ je stabilní ~~stav~~ $\Leftrightarrow$ v $\mathbb{x}$ má E lokální minimum.

Důkaz: "$\Leftarrow$": kdyby v $\mathbb{x}$ bylo lok. min, ale $\mathbb{x}$ nebyl stabilní, došlo by ke změně nějakého i^*, ale dle Lemma by klesla E, spor s tím, že v $\mathbb{x}$ je lok. min.

↳ tj. při změně lib. souřadnice se hodnota E zvýší

"$\Rightarrow$" podobně

Učení: Problém: Dána trénovací množina $T = \{ x^p \in \{-1,1\}^n \mid p \in P \}$
Najít váhy tak, aby stabilní body sítě byly právě prvky z T (popř. aby všechny $x^p \in T$ byly stabilními body)

Základní metoda: Hebbovo učení (Donald Hebb 1949, pro Hopf. sítě 1980s)

aktivace obou neuronů i, j, vede k positivní váze w_{ij} mezi těmito neurony

$\Downarrow$ Hebbovo pravidlo pro Hopfieldovy sítě

$$w_{ij} = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} x_i^p \cdot x_j^p$$

Pozorování: Pokud $T = \{ x \}$, tj. $|P| = 1$, pak při Hebbově učení je x stabilním bodem (tj. neučí se).

D.: $$E(x) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i x_j \cdot x_i x_j = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i^2 x_j^2 =$$

$= -\frac{1}{2} \cdot n(n-1)$ … nejmenší možná hodnota E, tedy lok. minimum, tedy stabilní bod. $\square$

Příklad použití Hopfieldových sítí: řešení kombinatorické optimalizace

př.: problém obchodního cestujícího (TSP - travelling salesman problem)

idea: problém "zakódujeme" do sítě tak, že nízké hodnoty E odpovídají dobrým řešením (kratším cestám)

- najít cestu sítí měst, každé navštívit právě jednou tak, aby součet délek cest byl nejmenší
- je známo, že je to NP-těžký optimalizační problém (tj. jeho rozhodovací varianta je NP-úplný problém); zajímavá jsou tedy i suboptimální řešení
- reprezentujme cestu městy $M_1, \ldots, M_n$ tabulkou

město \ pořadí	1	2	3	…	n
M_1	0	0	1	0 …	0
M_2	1	0	0	…	0
M_3	0	1	0	…	0
⋮	⋮				
M_n					

~ cesta $M_2 \to M_3 \to M_1 \to \ldots$

reprezentujme tabulku Hopfieldovou sítí s $n \times n$ neurony se stavy $x_{M_k i} \in \{0, 1\}$

hledáme síť, jejíž E splňuje: lokální minima ~ dobrá řešení TSP

podmínky:
1. každé město navštíveno nejvýše jednou, tj. v řádku max. jedna 1
2. v každém kroku navštíveno max. jedno město, tj. v každém sloupci max. jedna 1
3. v tabulce je rozmístěno právě n jedniček

podmínky 1.-3. ⇝ minimalizace následující funkce s parametry A, B, C

$$E_{ABC} = \underbrace{A \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} x_{M_k i} x_{M_k j}}_{\sim \text{podmínka } 1} + \underbrace{B \sum_{i} \sum_{j} \sum_{\ell \neq j} x_{M_j i} \cdot x_{M_\ell i}}_{\sim \text{podmínka } 2} + \underbrace{C\left[\sum_{k} \sum_{i} x_{M_k i} - n\right]^2}_{\sim \text{podmínka } 3}$$

4. podmínka: délka cesty je co nejmenší ($d_{M_i M_j}$ ... vzdálenost M_i a M_j)

člen $0.5\, D \sum_{i} \sum_{j\neq i} \sum_{k} d_{M_i M_j} \cdot x_{M_i k}\left(x_{M_j, k-1} + x_{M_j, k+1}\right) = E_D$

operace $k-1$ a $k+1$ jsou „mod n", tj. $n+1=1$, $1-1=n$

u cesty: člen $x_{M_i k}(x_{M_j,k-1} + x_{M_j,k+1}) \neq 0$ p.k. města M_i a M_j za sebou leží na cestě ($M_i \to M_j$ nebo $M_j \to M_i$), pak

$d_{M_i M_j} \cdot x_{M_i k}(x_{M_j,k-1} + x_{M_j,k+1})$ = vzdálenost mezi M_i a M_j

položme $E = E_{ABC} + E_D$

nahlédneme-li na E jako na funkci energie, musí mít váhy $w_{M_i k, M_j \ell}$ následující hodnotu (neboť $E = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \sum_{j,\ell} w_{M_i k, M_j \ell} \cdot x_{M_i k} \cdot x_{M_j \ell}$, do tohoto tvaru se snažíme E převést)

$$\begin{aligned} w_{M_i k M_j \ell} = & -2A\, \delta_{ij} (1 - \delta_{k\ell}) \\ & -2B\, \delta_{k\ell} (1 - \delta_{ij}) \\ & -2C \\ & -D \cdot d_{M_i M_j} (\delta_{k,\ell+1} + \delta_{k,\ell-1}) \end{aligned}$$

$$\delta_{AB} = \begin{cases} 1 & \text{pro } A = B \\ 0 & \text{pro } A \neq B \end{cases}$$

řešení: spuštěním sítě v náhodně zvoleném stavu (nebo stavu reprezentujícím „rozumnou" cestu) síť dojde do stabilního bodu, tedy do lokálního minima: $x(0) \to x(1) \to \dots \to \underbrace{x(t^*)}_{\text{reprezentuje nalezenou cestu}}$

J. Hopfield, D. Tank, 1986: Computing with neural circuits: A model. Science 233, No. 4764. (původně pro tzv. spojitý model sítě – ne diskrétní čas) další modely asociativní sítí:

- BAM (bidirectional associative memory), Bart Kosko
- spojité modely (stavy v $[-1,1]$ místo $\{-1,1\}$, spojitý čas místo diskrétního $0,1,2,\dots$)