Diskrétní struktury 1

Logika

Radim Bělohlávek

KATEDRA INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Co se naučíme

- co je logika
- výroky, pravdivost výroků, logické spojky, kvantifikátory
- výroková logika, formule logiky, vyplývání
- logické (booleovské) funkce, vyjadřování logických spojek jinými
- normální formy
- axiomatický systém logiky (jen nahlédneme)
- logické paradoxy, zajímavosti z logiky a z historie logiky

Upozornění

Tyto slajdy jsou jen doprovodným materiálem k učebnímu textu

[DS1] R. Bělohlávek, Diskrétní struktury 1, Olomouc, 2020.

Slajdy nejsou plnohodnotným studijním materiálem.
Některé části učebního textu na slajdech probrány nejsou.
Na učební text se odkazujeme [DS1].

Co je logika

- věda o správném usuzování
- jde o formu, ne o obsah

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Prší.}\\ \text{Jestliže prší, pak jsou silnice mokré.}\end{array}}{\text{Silnice jsou mokré.}}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Mám hlad.}\\ \text{Jestliže mám hlad, kručí mi v břiše.}\end{array}}{\text{Kručí mi v břiše.}}$$

úsudky s různým obsahem, ale stejnou formou:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi\\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

- proto: formální logika, popř. symbolická logika
- moderní logika používá matematické metody
- budeme se zabývat klasickou logikou:
  - dvě pravdivostní hodnoty (pravda, nepravda)
  - klasické spojky („a“, „nebo“, „jestliže ... pak ...“, ... ne ...)
- existují neklasické logiky
  - modální: spojky „je možné, že ...“, „je nutné, že“
  - temporální: výroky závislé na čase
  - fuzzy logika: více pravdivostních hodnot, např. 0.5 (je částečně pravda)

Proč logika

- obecný význam:
  - vede k přesnosti a srozumitelnosti
  - pevný základ pro ostatní obory
- význam pro informatiku:
  - formální povaha logiky, syntax vs. sémantika $\approx$ způsob práce v informatice, počítač rozumí jen přesně popsaným informacím
  - základ pro různé oblasti informatiky, např.
    automatické dokazování (odvozování z předpokladů, jazyk Prolog),
    umělá inteligence (reprezentace znalostí, přibližné odvozování, expertní systémy),
    databáze (relační databáze, dotazovací jazyky),
    logická analýza dat
  - kromě toho řada „menších důvodů", např. vyhodnocování podmíněných výrazů programovacích jazyků se provádí podle pravidel logiky

Výroky

Výrokem je (intuitivně) tvrzení, u kterého má smysl uvažovat o jeho pravdivosti.

Výroky jsou:

Prší.
Byl jsem v obchodě a koupil jsem si knihu.
Když prší, jsou mokré silnice.
$2 + 2 = 4$ a $3 < 100$.
$2 + 2 = 6$.

Výroky nejsou:

Kniha v obchodě.
$2 + 2$
Ať je pěkné počasí.

Logické spojky

Logická spojka je (intuitivně) jazykový výraz, který umožňuje z jednodušších výroků tvořit složitější.

Příklady logických spojek:

„. . . a . . . “, „. . . nebo . . . “, „jestliže . . . , pak . . . “,
„. . . , právě když . . . “, „ne . . . “ (tj. „není pravda, že . . . “).

- Z výroků „2+2=4“ a „Prší.“ vytvoříme pomocí spojky „a“ výrok „2+2=4 a Prší.“
- Z výroku „Prší.“ vytvoříme pomocí spojky „ne“ (tj. „není pravda, že . . . “) výrok „Neprší.“ (tj. „Není pravda, že prší.“).
- Z výroků „Prší.“ a „Silnice jsou mokré.“ vytvoříme pomocí spojky „jestliže . . . , pak . . . “ výrok „Jestliže prší, pak jsou silnice mokré.“

Všimněme si:

- pojem spojka používáme v logice v širším významu, než je běžné (např. „jestliže …, pak …“)
- výše uvedené jsou takzvané klasické spojky
- existují neklasické („je možné, že …“, „věří se, že …“), viz [DS1]

Označení základních spojek klasické logiky:

$V_1 \wedge V_2$ označuje „V_1 a V_2“

$V_1 \vee V_2$ označuje „V_1 nebo V_2“

$V_1 \rightarrow V_2$ označuje „jestliže V_1, pak V_2“

$V_1 \leftrightarrow V_2$ označuje „V_1, právě když V_2“

$\neg V$ označuje „není pravda, že V“

Pravdivostní hodnota výroku

- některé výroky jsou pravdivé („$2 + 2 = 4$“),
  některé jsou nepravdivé („Jaromír Jágr je prezidentem ČR.“)
- je-li výrok V pravdivý, resp. nepravdivý, říkáme, že má pravdivostní hodnotu „pravda“, resp. „nepravda“, a píšeme

$$||V|| = 1, \quad \text{resp.} \quad ||V|| = 0,$$

- pravdivostní hodnota výroku V se značí $||V||$

Jak určit pravdivostní hodnotu výroku?

- výrok je „Prší a venkovní teplota je menší než 15°C.“
- vznikl použitím spojky „a“ na výroky „Prší“ a „Venkovní teplota je menší než 15°C.“
- jeho pravdivostní hodnota závisí na
  - významu spojky „a“
  - pravdivostních hodnotách výroků „Prší“ a „Venkovní teplota je menší než 15°C.“
- uvedený výrok je pravdivý, právě když je pravdivý první výrok i druhý výrok
- jaké je za tím obecné pravidlo?

Obecný pohled:

- výrok má tvar
$$V_1 \wedge V_2$$
kde $\wedge$ je symbol spojky „a"
- pravdivostní hodnotu $||V_1 \wedge V_2||$ „spočítáme" z pravdivostních hodnot $||V_1||$ a $||V_2||$ výroků V_1 a V_2 pomocí významu spojky „a"
- význam spojky „a" je dán tabulkou:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

- je-li např. $||V_1|| = 1$ (V_1 je pravdivý) a $||V_2|| = 0$ (V_2 je nepravdivý), je dle tabulky $||V_1 \wedge V_2|| = 0$
- je-li $||V_1|| = 1$ a $||V_2|| = 1$ (oba výroky pravdivé), je dle tabulky $||V_1 \wedge V_2|| = 1$
- analogicky postupujeme v případě ostatních spojek

Zbývá tedy zjistit pravdivostní hodnoty $||V_i||$. Jak? Jsou dvě možnosti:

1. V_i neobsahuje logické spojky (je to atomický výrok)
   Například V_i je „Prší."
   Hodnota $||V_i||$ je pak dána „zvenčí", tj. zjistíme, jestli prší, popř. se někoho zeptáme.
   Určíme ji tedy podle externího zdroje e (stojí mimo logiku).
   e určuje pravdivostní hodnoty atomických výroků, proto taky píšeme
   $$||V||_e \quad \text{místo} \quad ||V||$$
2. V_i obsahuje logické spojky (je to složený výrok)
   například V_i je „Prší a $2 + 2 = 4$."
   Hodnota $||V_i||$ se pak určí podobně jako na předchozím slajdu.

Ještě k tabulce spojky $\wedge$ (později vysvětlíme znovu):

- tabulka

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

  popisuje tzv. pravdivostní funkci spojky $\wedge$ (také: logická nebo booleovská funkce)
- tato funkce se značí $\dot{\wedge}$, jejími argumenty jsou 0 a 1 a podle tabulky pro ni platí:

$$0 \dot{\wedge} 0 = 0, \qquad 0 \dot{\wedge} 1 = 0, \qquad 1 \dot{\wedge} 0 = 0, \qquad 1 \dot{\wedge} 1 = 1$$

- máme tedy
  - $\wedge \cdots$ symbol spojky (syntax)
  - $\dot{\wedge} \cdots$ význam spojky (sémantika)
- někdy píšeme pro jednoduchost $\wedge$ místo $\dot{\wedge}$, ale přísně vzato je třeba rozlišovat
- a další spojky?

název	zápis v přirozeném jazyce	symbol	pravdivostní funkce	tabulka pravd. funkce
negace	“ne”	$\neg$	$\neg^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|c} a & \neg^{\cdot} a \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$
konjunkce	“a”	$\wedge$	$\wedge^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \wedge^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
disjunkce	“nebo”	$\vee$	$\vee^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \vee^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$
implikace	“jestliže . . . , pak . . . ”	$\rightarrow$	$\rightarrow^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \rightarrow^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$
ekvivalence	“. . . , právě když . . . ”	$\leftrightarrow$	$\leftrightarrow^{\cdot}$	$\begin{array}{c\|cc} \leftrightarrow^{\cdot} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$

Příklad

Určete pravdivostní hodnotu výroku „$2+2=5$ nebo číslo 10 je dělitelné číslem 6."

Jde o výrok V tvaru

$$V_1 \vee V_2$$

Zřejmě je (to víme z „externího zdroje" e)

$$||V_1|| = ||\text{„}2+2=5\text{"}|| = 0 \quad \text{a} \quad ||V_2|| = ||\text{„číslo } 10 \text{ je dělitelné číslem } 6\text{"}|| = 0$$

a tedy

$$\begin{aligned} ||V|| &= ||\text{„}2+2=5 \text{ nebo číslo } 10 \text{ je dělitelné číslem } 6.\text{"}|| = \\ &= ||V_1 \vee V_2|| = ||V_1|| \mathbin{\dot\vee} ||V_2|| = 0 \mathbin{\dot\vee} 0 = 0. \end{aligned}$$

Daný výrok je tedy nepravdivý.

K čemu takhle? Odpověď je přeci zřejmá? Ano, ale výše je u postup, jak ji mechanicky odvodit.

Uzávorkování

U složených výroků používáme kvůli jednoznačnosti závorky.

Uvažujme
$$2 \cdot 3 = 5 \text{ a } 2 + 2 = 5 \text{ nebo } 2 + 2 = 4$$

Není jasné, jestli myslíme
$$(2 \cdot 3 = 5 \text{ a } 2 + 2 = 5) \text{ nebo } 2 + 2 = 4\text{''}$$

nebo
$$2 \cdot 3 = 5 \text{ a } (2 + 2 = 5 \text{ nebo } 2 + 2 = 4)\text{''}$$

Při prvním uzávorkování dostaneme pravdivý výrok, zatímco při druhém uzávorkování dostaneme výrok nepravdivý.

Závorky používáme i při symbolickém zápisu. Píšeme např. $V_1 \wedge (V_2 \vee V_3)$, $(V_1 \wedge V_2) \vee V_3$.

Příklad

Určete pravdivostní hodnotu výroku:
"($2+2=4$ a číslo 10 je dělitelné číslem 6), právě když není pravda, že Čína je nejlidnatější stát světa", víme-li, že "Čína je nejlidnatější stát světa" je pravdivý výrok.

Tři atomické výroky, V_1, V_2 a V_3:
"$2+2=4$", "číslo 10 je dělitelné číslem 6" a "Čína je nejlidnatější stát světa."

Víme, že $||V_1||=1$, $||V_2||=0$, $||V_3||=1$.

Symbolická podoba zadaného výroku je

$$(V_1 \wedge V_2) \leftrightarrow \neg V_3.$$

Pravdivostní hodnota je

$$\begin{gathered} ||(V_1 \wedge V_2) \leftrightarrow \neg V_3|| = ||V_1 \wedge V_2|| \mathrel{\dot{\leftrightarrow}} ||\neg V_3|| = \\ (||V_1|| \mathrel{\dot{\wedge}} ||V_2||) \mathrel{\dot{\leftrightarrow}} (\dot{\neg}||V_3||) = (1 \mathrel{\dot{\wedge}} 0) \mathrel{\dot{\leftrightarrow}} (\dot{\neg} 1) = 0 \mathrel{\dot{\leftrightarrow}} 0 = 1, \end{gathered}$$

tedy výrok je pravdivý.

Proměnné a výroky s kvantifikátory

> Číslo x je větší nebo rovno 3.
> $2 + y = 4$.
> Jestliže je x dělitelné deseti, pak je x sudé.
> $x + y \geq z$.

Nejsou to výroky. Obsahují proměnné.

Dosazením číselných hodnot za proměnné vzniknou výroky. Pokud dosadíme 1 za x, 2 za y, 103 za z, dostaneme výroky

> Číslo 1 je větší nebo rovno 3.
> $2 + 2 = 4$.
> Jestliže je 1 dělitelné deseti, pak je 1 sudé.
> $1 + 2 \geq 103$.

První a čtvrtý výrok je nepravdivý, druhý a třetí je pravdivý.

Výroky s proměnnými se nazývají výrokové formy.

$V(x)$ označuje výrokovou formu s proměnnou x, např. „Číslo x je větší nebo rovno 3.“.
$V(1)$ označuje $V(x)$ po dosazení 1 za x, tedy např. „Číslo 1 je větší nebo rovno 3.“

Podobně „$x + y \geq z$“ označíme např. $U(x, y, z)$.

K proměnné x musíme určit obor jejích hodnot D_x. Např.
$D_x = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$.

Obecný kvantifikátor s proměnnou x je výraz

„Pro každý x platí, že …“, symbolicky $(\forall x)\ \ldots$

Tedy

„Pro každý x platí, že x je větší nebo rovno 1“ zapíšeme $(\forall x)\ (x \geq 1)$.

Tento výraz je výrokem.

Existenční kvantifikátor s proměnnou x je výraz

„Existuje x tak, že platí … “, symbolicky $(\exists x)\ldots$

Tedy

„Existuje x tak, že x je větší nebo rovno 1“ zapíšeme $(\exists x)\ (x \geq 1)$.

Ten výraz je také výrokem.

Pravdivost výroků s kvantifikátory

Je dána výroková forma $V(x)$, kde x je proměnná s oborem hodnot D_x.
Jak definovat pravdivostní hodnoty $(\forall x)V(x)$ a $(\exists x)V(x)$?

$$||(\forall x)V(x)|| = \begin{cases} 1 & \text{pokud pro každé } m \in D_x \text{ je } ||V(m)|| = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy: $(\forall x)V(x)$ je pravdivý, pokud pro každou hodnotu m z oboru D_x je výrok $V(m)$, který vznikne dosazením m do výrokové formy $V(x)$, pravdivý.

$$||(\exists x)V(x)|| = \begin{cases} 1 & \text{pokud aspoň pro jedno } m \in D_x \text{ je } ||V(m)|| = 1 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tedy: $(\exists x)V(x)$ je pravdivý, pokud pro alespoň jednu hodnotu m z oboru D_x je výrok $V(m)$, který vznikne dosazením m do výrokové formy $V(x)$, pravdivý.

Příklad

Je dán výrok „Pro každé x platí, že jestliže x je dělitelné 6, pak x je dělitelné 3." a $D_x = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$. Určete pravdivostní hodnotu daného výroku.

Výrok má tvar $(\forall x)(V(x))$, kde $V(x)$ je „Jestliže x je dělitelné 6, pak x je dělitelné 3."

Podle pravidla výše je $||(\forall x)(V(x))|| = 1$, p.k. pro každé číslo m z D_x je $||V(m)|| = 1$.

$V(m)$ je $V_1(m) \to V_2(m)$, kde $V_1(m)$ je „m je dělitelné 6", $V_2(m)$ je „m je dělitelné 3".

Je zřejmé, že $||V_1(m) \to V_2(m)|| = 1$, tj. že $||V(m)|| = 1$. Proč?:

(a) pro m dělitelná 6 je $||V_1(m) \to V_2(m)|| = ||V_1(m)|| \overset{\cdot}{\to} ||V_2(m)|| = 1 \overset{\cdot}{\to} 1 = 1$;

(b) pro m nedělitelná 6 je
$||V_1(m) \to V_2(m)|| = ||V_1(m)|| \overset{\cdot}{\to} ||V_2(m)|| = 0 \overset{\cdot}{\to} ||V_2(m)|| = 1$).

Proto je $||(\forall x)V(x)|| = ||(\forall x)(V_1(x) \to V_2(x))|| = 1$.

Příklad

Je dán výrok „Existuje x tak, že pro každé y platí, že $x \leq y$“. $D_x = D_y = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Výrok je pravdivý, viz [DS1].

Co když $D_x = D_y = \{\dots, -2 - 1 - 0, 1, 2, \dots\}$?

Zkratka

Kvantifikátory se někdy objevují v následující podobě.

- „Pro každé liché x platí, že $x^2 - 1$ je sudé."
- „Existuje liché x tak, že $x^2 - 2$ je prvočíslo.",

obecně tedy:

- „Pro každé x splňující $P(x)$ platí $V(x)$."
- „Existuje x splňující $P(x)$ tak, že $V(x)$."

Tato tvrzení jsou zkratkou za

- „Pro každé x platí, že jestliže $P(x)$, pak $V(x)$."
- „Existuje x tak, že $P(x)$ a $V(x)$."

u výroku výše tedy

- „Pro každé x platí, že jestliže x je liché, pak $x^2 - 1$ je sudé."
- „Existuje x tak, že x je liché a že $x^2 - 2$ je prvočíslo."

Shrnutí

- ukázali jsme si základní pojmy a postupy logiky, zejm.
  - zejména výrok, logická spojka,
  - prvadivostní funkce spojek,
  - pravdivost výroku,
  - kvantifikátory
- většinu pojmů jsme definovali jen intuitivně, nepřesně
- to někdy stačí, nepřesnost ale může vést k problémům
- v dalším se proto seznámíme s úvodem do (formální) výrokové logiky

Odbočka: paradoxy

Existuje velké množství tzv. logických paradoxů, některé plynou z nepřesného zacházení s jazykem a ukazují potřebu formálního systému logiky.

Paradox lháře: Člověk C říká: „Lžu“. Mluví pravdu?

Jiné ukazují např. na meze klasické logiky.

Paradox hromady: 1 je malé přirozené číslo. Je-li n malé, je i $n+1$ malé. Tedy každé přirozené číslo je malé.

Vrátíme se k němu později.

ZÁKLADY VÝROKOVÉ LOGIKY

Výroková logika

- definovat výroky, pravdivost apod. intuitivně nestačí
- přirozený jazyk je bohatý a intuitivní přístup vede k logickým sporům (p. lháře)
- možné řešení: pojmy výrok, pravdivost apod. definovat přesně, formálně
- výroková logika je nejjednodušším formálním systémem logiky

Jazyk a formule výrokové logiky

- výroková logika (VL) nepracuje se skutečnými výroky, ale s formami (tvary) výroků
- ty se nazývají formule
- jsou to přesně definované řetězce symbolů, např. $(p \wedge \neg q)$, $(p \rightarrow (q \wedge r))$, $(p \wedge r) \vee q$
- výrok vznikne z formule dosazením výroků za výrokové symboly p, q, r, ...
- z formule $(p \rightarrow (q \wedge r))$ vznikne výrok
  „Jestliže prší, pak jsou silnice mokré a hrozí nebezpečí smyku.“,
- práce s formulemi $=$ soustředíme se na formu, odhlížíme od obsahu
- symboly, ze kterých sestávají formule tvoří jazyk VL

Definice Jazyk výrokové logiky se skládá z

- výrokových symbolů p, q, r, $\ldots$, popř. s indexy, p_1, p_2; je jich neomezeně mnoho;
- symbolů výrokových spojek:
  $\neg$ (negace), $\rightarrow$(implikace), popř. dále $\wedge$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\leftrightarrow$ (ekvivalence);
- pomocných symbolů (,), [,], atd. (různé druhy závorek).

Definice Formule daného jazyka výrokové logiky je definována následovně:

1. každý výrokový symbol p je formule (tzv. atomická formule);
2. jsou-li φ a ψ formule, jsou i výrazy

   $$\begin{array}{l} \neg\varphi, \\ (\varphi \wedge \psi), \\ (\varphi \vee \psi), \\ (\varphi \to \psi), \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) \end{array}$$

   formule (tzv. složené formule).

Definice je tzv. induktivní.

Formulemi jsou: p, q_1, $\neg p$, $(p \to q)$, $((p \wedge r) \vee p)$, $(\neg p \to (q \wedge \neg r))$.

Formulemi nejsou řetězce: $\wedge p$, $p \wedge \vee p$, $pp \to (p\wedge))$, atd.

Konvence o vynechávání závorek

- vnější závorky místo $(p \to q)$ jen $p \to q$
- priority spojek od největší po nejmenší: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$

místo $(p \wedge (q \wedge r))$ jen $p \wedge (q \wedge r)$,
místo $(p \to ((p \wedge q) \vee r))$ jen $p \to p \wedge q \vee r$

Pravdivostní ohodnocení

Formule jsou syntaktické objekty, samy o sobě nemají pravdivostní hodnotu, význam. Proto musíme definovat sémantiku VL. Základní sémantický pojem je následující:

Definice (Pravdivostní) ohodnocení je libovolné zobrazení e výrokových symbolů daného jazyka do množiny $\{0, 1\}$.

- e tedy přiřazuje každému symbolu p hodnotu 0 (nepravda) nebo 1 (pravda).
- význam ohodnocení e:
  výrokové symboly označují atomické výroky
  $e(p) = 1$ znamená, že atomický výrok označený symbolem p je pravdivý
  $e(p) = 0$ znamená, že atomický výrok označený symbolem p je nepravdivý.

Pravdivostní hodnota formule

Definice Pravdivostní hodnota formule φ při daném ohodnocení e, označujeme ji $\|\varphi\|_e$, je definována následovně:

- Je-li φ výrokovým symbolem p, pak

$$\|p\|_e = e(p).$$

- Je-li φ složná formule, tj. jednoho z tvarů $\neg\psi$, $\psi \wedge \theta$, $\psi \vee \theta$, $\psi \to \theta$, $\psi \leftrightarrow \theta$, pak

$$\begin{aligned}
&\|\neg\psi\|_e = \neg^{\cdot}\|\psi\|_e,\\
&\|\psi \wedge \theta\|_e = \|\psi\|_e \wedge^{\cdot} \|\theta\|_e,\\
&\|\psi \vee \theta\|_e = \|\psi\|_e \vee^{\cdot} \|\theta\|_e,\\
&\|\psi \to \theta\|_e = \|\psi\|_e \to^{\cdot} \|\theta\|_e,\\
&\|\psi \leftrightarrow \theta\|_e = \|\psi\|_e \leftrightarrow^{\cdot} \|\theta\|_e,
\end{aligned}$$

  kde $\neg^{\cdot}$, $\wedge^{\cdot}$, $\vee^{\cdot}$, $\to^{\cdot}$, $\leftrightarrow^{\cdot}$ jsou pravdivostní funkce logických spojek z výše uvedené tabulky.

Definice je induktivní, „kopíruje“ definici formule.

- $\|\varphi\|_e = 1$ ($\|\varphi\|_e = 0$) …formule φ je při ohodnocení e pravdivá (nepravdivá)
- důležité:
  - otázka „je formule φ pravdivá?“ nemá smysl
  - teprve otázka „je formule φ pravdivá při daném e?“ má smysl
- alternativní definice $\|\varphi\|_e$ (slovně):

$$\|\neg\psi\|_e = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\psi\|_e = 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\|\psi \wedge \theta\|_e = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\psi\|_e = 1 \text{ a } \|\theta\|_e = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\|\psi \vee \theta\|_e = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\psi\|_e = 1 \text{ nebo } \|\theta\|_e = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\|\psi \rightarrow \theta\|_e = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\psi\|_e = 0 \text{ nebo } \|\theta\|_e = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$\|\psi \leftrightarrow \theta\|_e = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \|\psi\|_e = \|\theta\|_e, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad

Jakou pravdivostní hodnotu má formule $p \vee \neg q$ při ohodnocení e?

1. e je dáno takto: $e(p) = 0$, $e(q) = 0$. Pak

   $\|p \vee \neg q\|_e = \|p\|_e \vee^{\cdot} \|\neg q\|_e = \|p\|_e \vee^{\cdot} \neg^{\cdot} \|q\|_e = 0 \vee^{\cdot} \neg^{\cdot} 0 = 0 \vee^{\cdot} 1 = 1$

2. e je dáno takto: $e(p) = 0$, $e(q) = 1$. Pak

   $\|p \vee \neg q\|_e = \|p\|_e \vee^{\cdot} \|\neg q\|_e = \|p\|_e \vee^{\cdot} \neg^{\cdot} \|q\|_e = 0 \vee^{\cdot} \neg^{\cdot} 1 = 0 \vee^{\cdot} 0 = 0.$

Tautologie, sémantické vyplývání

Definice Formule se nazývá

- tautologie, je-li při každém ohodnocení pravdivá,
- kontradikce, je-li při každém ohodnocení nepravdivá,
- splnitelná, je-li při aspoň jednom ohodnocení pravdivá.

Formule φ sémanticky vyplývá z množiny T formulí, označujeme

$$T \models \varphi,$$

je-li φ pravdivá při každém ohodnocení, při kterém jsou pravdivé všechny formule z T.

Příklad

1. Formule $p \vee \neg p$ i $p \to (p \vee q)$ jsou tautologie.
2. Formule $p \wedge \neg p$ i $p \leftrightarrow \neg p$ jsou kontradikce.
3. Formule $p \to \neg p$ je splnitelná, ale není to ani tautologie, ani kontradikce.
4. Formule $p \to q$ sémanticky vyplývá z množiny formulí $T = \{p \to r, \neg q \to \neg r\}$.

Tabulková metoda

- jak zjistit a zapsat pravdivostní hodnoty formule při všech možných ohodnoceních
- sloupce ≈ výrokové symboly $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a jeden sloupec pro formuli $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$
  řádky ≈ jednotlivá pravdivostní ohodnocení

Tabulka (nebo pravdivostní tabulka) pro formuli $(p \to q) \wedge (p \to r)$ je

p	q	r	$(p \to q) \wedge (p \to r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabulka popisuje tzv. pravdivostní funkci formule $(p \to q) \wedge (p \to r)$.

- počet řádků $=$ počet možných přiřazení 0 a 1 symbolům $p_1, \ldots, p_n$ ve formuli φ
- tento počet je 2^n
- v řádku odpovídajícím ohodnocení e jsou hodnoty: $e(p_1)$, ..., $e(p_n)$, $\|\varphi\|_e$
- předchozí tabulka: 3 výrokové symboly p, q, r, tabulka má tedy $2^3 = 8$ řádků
- drobná nepřesnost: u tabulkové metody nepracujeme s „celými“ ohodnoceními e, ale jen s „částmi ohodnocení“, tj. s hodnotami ohodnocení e pro $p_1, \ldots, p_n$;

  to můžeme, protože hodnota $\|\varphi(p_1, \ldots, p_n)\|_e$ závisí jen na $e(p_1), \ldots, e(p_n)$; viz [DS1]
- zřejmě platí: φ je
  - tautologie, právě když ve sloupci odpovídajícím formuli φ jsou samé 1;
  - kontradikce, právě když ve sloupci odpovídajícím formuli φ jsou samé 0;
  - splnitelná, právě když ve sloupci odpovídajícím formuli φ je aspoň jedna 1.

Vybrané tautologie (ověřte tabulkovou metodou)

$$\varphi \vee \neg\varphi \qquad \text{(zákon vyloučeného třetího)}$$

$$\varphi \rightarrow \varphi$$

více viz [DS1]

– Lze pro více formulí. Tabulka pro formule $\neg\neg p$, $(\neg q \to \neg p)$ a q:

p	q	$\neg\neg p$	$(\neg q \to \neg p)$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

– Zjistit, zda $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\} \models \varphi$, tj. formule φ sémanticky plyne z formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$: právě když v každém řádku, kde mají $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ hodnotu 1, má i φ hodnotu 1.

– Např. výše vidíme, že

$$\{\neg\neg p, (\neg q \to \neg p)\} \models q,$$

ale

$$\{\neg q \to \neg p), q\} \not\models \neg\neg p,$$

neboť ve druhém řádku mají $(\neg q \to \neg p)$ a q hodnotu 1, ale $\neg\neg p$ tam má 0.

(Sémanticky) ekvivalentní formule

Definice Formule φ a ψ se nazývají (sémanticky) ekvivalentní, značíme $\varphi \equiv \psi$, právě když pro každé ohodnocení e je $\|\varphi\|_e = \|\psi\|_e$.

Věta Formule φ a ψ jsou ekvivalentní, právě když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$.
Důkaz Plyne přímo z definice $\equiv$ a $\models$.

Příklad Ukažte, že (a) $\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ a že (b) $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$.
Ověříme tabulkou:

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	$\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	$\varphi \to \psi$	$\neg\varphi \vee \psi$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

(a): 3. a 4. sloupec mají stejné hodnoty;
(b): 5. a 6. sloupec mají stejné hodnoty.

Důležité dvojice ekvivalentních formulí

$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	$\psi \vee \varphi \equiv \varphi \vee \psi$	(komutativita)
$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$	$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$	(asociativita)
$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$	$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$	(distributivita)
$\varphi \equiv \neg\neg\varphi$		(zákon dvojí negac
$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	(De Morganovy zák
$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$	$\varphi \to \psi \equiv \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$	
$\varphi \to \psi \equiv \neg\psi \to \neg\varphi$		(obměněná implika

Obměněná a obrácená implikace

Pro formuli $\varphi \to \psi$ se často uvažují následující formule:

$\neg\psi \to \neg\varphi$ (obměněná implikace)

$\psi \to \varphi$ (obrácená implikace)

Jak ukazuje následující tabulka, $\neg\psi \to \neg\varphi$ je ekvivalentní s $\varphi \to \psi$, ale $\psi \to \varphi$ ne.

φ	ψ	$\varphi \to \psi$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	$\psi \to \varphi$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

Obměněná implikace: použití

Máme-li dokázat tvrzení ve tvaru $\varphi \rightarrow \psi$, můžeme místo toho dokázat $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$, což může být snazší.

Příklad
DOPLNIT

Booleovské funkce

Definice Booleovská funkce s n argumenty je libovolná funkce f, která každé uspořádané n-tici hodnot 0 nebo 1 přiřadí hodnotu 0 nebo 1, tedy libovolná

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}.$$

– B. funkci f s n argumenty lze zapsat tabulkou podobně jako u tabulkové metody.
  Zde jsou tabulky binárních b. funkcí f a g:

x_1	x_2	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x_1	x_2	g
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

– f je shodná s $\vee^{\cdot}$ (pravdivostní funkce spojky $\vee$).
  g je nová pravdivostní funkce (odpovídá spojce „buď . . . , nebo . . . “).

- Každou booleovskou funkci 2 proměnných můžeme považovat za pravdivostní funkci logické spojky se dvěma argumenty.
- Tedy spojky $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$ jen některé z logických spojek se dvěma argumety (viz funkce g výše).
- Kolik je ale booleovských funkcí s n argumenty, tj. kolik je různých logických spojek s n argumenty?

Věta Existuje právě $2^{(2^n)}$ booleovských funkcí s n argumenty.

Důkaz Funkcí je tolik, kolika způsoby lze vyplnit příslušnou tabulku.
Protože funkce mají n argumentů, má tabulka 2^n řádků.
V každém řádku je jedno volné místo pro hodnotu funkce, a tu můžeme vyplnit libovolným způsobem (napsat tam 0 nebo 1).
Protože volných míst je 2^n, lze je hodnotami 0 nebo 1 vyplnit $2^{(2^n)}$ způsoby.

Všechny unární ($n = 1$) booleovské funkce:

Dle Věty jich je $2^{(2^n)} = 2^{(2^1)} = 2^2 = 4$. Zde jsou:

x_1	f_1
0	0
1	0

x_1	f_2
0	0
1	1

x_1	f_3
0	1
1	0

x_1	f_4
0	1
1	1

f_1 . . . nepravda, f_2 . . . identita, f_3 . . . negace, f_4 . . . pravda

Všechny binární ($n = 2$) booleovské funkce:

Dle Věty jich je $2^{(2^n)} = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16$. Zde jsou:

x_1	x_2	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

všimněme si:

- f_2, f_8, f_{10} a f_{14} jsou po řadě pravdivostní funkce spojek $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ a $\rightarrow$.
- Funkce f_7 je pravdivostní funkce výše zmíněné spojky „buď . . . , anebo . . . “

Booleovské funkce vytvořené formulemi

- Každá formule $\varphi(p_1, \dots, p_n)$ vytvoří (indukuje) booleovskou funkci f_φ s n argumenty. Je to právě funkce, jejíž tabulku získáme vytvořením tabulky pro formuli φ.
- Pro formuli $(p \to q) \wedge (q \to r)$ je $f_{(p \to q) \wedge (q \to r)}$ znázorněna v tabulce

p	q	r	$f_{(p \to q) \wedge (p \to r)}$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Platí i naopak: Ke každé booleovské funkci f s n argumenty existuje formule φ taková, že tato formule indukuje právě funkci f, tj. $f = f_\varphi$. Dokonce k tomu stačí spojky $\neg$, $\wedge$ a $\vee$. Ukážeme nyní.

Úplné disjunktivní a konjunktivní normální formy

Definice Nechť V je množina výrokových symbolů. Pak

- literál je libovolný výrokový symbol z V nebo jeho negace;
- úplná elementární konjunkce (ÚEK) je konjunkce literálů, kde se každý symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu;
- úplná elementární disjunkce (ÚED) je disjunkce literálů, kde se každý symbol z V vyskytuje právě v jednom literálu;
- úplná konjunktivní normální forma (ÚKNF) je konjunkce úplných el. disjunkcí nad V;
- úplná disjunktivní normální forma (ÚDNF) je disjunkce úplných el. konjunkcí nad V.

Význam:
ÚDNF a ÚKNF $=$ standardizované tvary formulí

Příklad Pro $V = \{p, q, r\}$

- literály: $p, q, r, \neg p, \neg q, \neg r$ (ne $\neg\neg p$)
- ÚEK: $p \wedge q \wedge r$, $\neg p \wedge q \wedge \neg r$ (ne $p \wedge r$)
- ÚED: $p \vee \neg q \vee r$
- ÚDNF: $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
- ÚKNF: $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$

Konstrukce úplné disjunktivní normální formy k dané f

- Je dána (tabulkou) booleovská funkce $f(x_1, \dots, x_n) : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.
- Uvažujme následující postup pro vytvoření ÚDNF φ nad $V = \{p_1, \dots, p_n\}$:

1. Pro každý řádek tabulky odpovídající ohodnocení e, při kterém má funkce f hodnotu 1 (tedy $f(e(p_1), \dots, e(p_n)) = 1$) sestrojíme ÚEK

$$l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_n$$

   kde

$$l_i = \begin{cases} p_i & \text{pokud } e(p_i) = 1 \\ \neg p_i & \text{pokud } e(p_i) = 0 \end{cases}$$

2. φ je disjunkcí ÚEK postupně sestrojených v bodu 1.

Příklad konstrukce ÚDNF k dané f

Booleovská funkce f je dána následující tabulkou:

p	q	r	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Krok 1.: projdeme řádky s 1 ve sloupci „f“ a vytvoříme příslušné ÚEK:
ř. 1. : ÚEK je $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
ř. 2. : ÚEK je $\neg p \wedge \neg q \wedge r$
ř. 8. : ÚEK je $p \wedge q \wedge r$

Krok 2.: výsledná ÚDNF je disjunkcí ÚEK z kroku 1., tedy je to formule

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

Správnost konstrukce

Věta Pokud f má aspoň v jednom řádku hodnotu 1 (tedy nepředstavuje kontradikci), pak sestrojená ÚDNF φ splňuje $f = f_\varphi$ (tedy φ vytváří (reprezentuje) funkci f; tabulky f a φ jsou stejné).

(Pokud má f ve všech řádcích 0, postup vrátí „prázdnou formuli".)

Důkaz Máme ukázat, že pro libovolné ohodnocení e platí:
$\|\varphi\|_e = 1$, p. k. v tabulce f je v řádku odpovídajícímu e hodnota 1.

φ má tvar $k_1 \vee \cdots \vee k_m$.

„$\Rightarrow$": Nechť $\|\varphi\|_e = 1$. Z vlastností $\vee$: pro nějakou $k_j = l_1 \wedge \cdots \wedge l_n$ musí být $\|k_j\|_e = 1$.
Tedy musí být: pro $l_i = p_i$ je $e(p_i) = 1$ a pro $l_i = \neg p_i$ je $e(p_i) = 0$.
To e je ale právě ohodnocení odpovídající řádku, díky kterému se k_j dostala do φ, tedy v tomto řádku je hodnota 1.

„$\Leftarrow$": Je-li v nějakém řádku 1, uvažujme odpovídající ohodnocení e a odpovídající k_j.
Z konstrukce plyne, že $\|k_j\|_e = 1$, a tedy $\|\varphi\|_e = \|k_1 \vee \cdots \vee k_m\|_e = 1$. $\square$

Jako snadný důsledek tedy dostaneme:

Věta Ke každé booleovské funkci f, která nepředstavuje kontradikci, existuje ÚDNF φ tak, že $f = f_\varphi$.

Důkaz Požadovanou φ je například ÚDNF sestrojená k tabulce funkce f.

Konstrukce ÚDNF k dané formuli ψ

Úlohu lze obměnit:
Je dána formule ψ (místo funkce f). Najděte ÚDNF φ tak, že φ a ψ jsou sémanticky ekvivalentní (tj. mají stejné tabulky).

Příklad Sestrojte ÚDNF formule $(p \to q) \wedge (p \to r)$.

Vytvoříme tabulku. Rovnou přidáme sloupec, kam zapíšeme ÚEK:

p	q	r	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	ÚEK
0	0	0	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$
0	0	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$
0	1	0	1	$\neg p \wedge q \wedge \neg r$
0	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$
1	0	0	0	
1	0	1	0	
1	1	0	0	
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$

ÚDNF tedy je $(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Konstrukce ÚKNF k dané funkci f (formuli ψ)

- Místo hledání ÚDNF můžeme hledat ÚKNF φ k dané funkci $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (nebo k dané formuli ψ).
- Postup je „duální“:

1. Pro každý řádek tabulky odpovídající ohodnocení e, při kterém má funkce f hodnotu 0 (tedy $f(e(p_1),\dots,e(p_n)) = 0$) sestrojíme ÚED

$$l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_n$$

kde

$$l_i = \begin{cases} p_i & \text{pokud } e(p_i) = 0 \\ \neg p_i & \text{pokud } e(p_i) = 1 \end{cases}$$

2. φ je konjunkcí ÚED postupně sestrojených v bodu 1.

Sestrojte ÚKNF k formuli $(p \to q) \wedge (p \to r)$.

Vytvoříme tabulku pravdivostní funkce formule $(p \to q) \wedge (p \to r)$; do dalšího sloupce zapíšeme příslušné ÚED.

p	q	r	$(p \to q) \wedge (p \to r)$	ÚED
0	0	0	1	
0	0	1	1	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	0	$\neg p \vee q \vee r$
1	0	1	0	$\neg p \vee q \vee \neg r$
1	1	0	0	$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	1	1	1	

Tedy ÚKNF je: $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$

Analogická (duální) tvrzení pro ÚKNF

Věta Pokud f má aspoň v jednom řádku hodnotu 0 (tedy f nepředstavuje tautologii), pak sestrojená ÚKNF φ splňuje $f = f_\varphi$.

Jako snadný důsledek tedy dostaneme:

Věta Ke každé booleovské funkci f, která nepředstavuje tautologii, existuje ÚKNF φ tak, že $f = f_\varphi$.

Vyjadřování spojek jinými spojkami

Víme:
$\varphi \vee \psi \equiv \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$, tedy
$\varphi \vee \psi$ a $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ nabývají stejných hodnot.

Jinak řečeno, pro libovolné pravdivostní hodnoty a a b je
$a \vee^{\cdot} b = \neg^{\cdot}(\neg^{\cdot} a \wedge^{\cdot} \neg^{\cdot} b)$

To znamená, že spojku $\vee$ lze vyjádřit pomocí $\neg$ a $\wedge$.

Další příklady:

$$
\begin{aligned}
a \,\dot{\vee}\, b &= \dot{\neg}(\dot{\neg} a \,\dot{\wedge}\, \dot{\neg} b)\\
a \,\dot{\vee}\, b &= \dot{\neg} a \,\dot{\rightarrow}\, b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \,\dot{\wedge}\, b &= \dot{\neg}(\dot{\neg} a \,\dot{\vee}\, \dot{\neg} b)\\
a \,\dot{\wedge}\, b &= \dot{\neg}(a \,\dot{\rightarrow}\, \dot{\neg} b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \,\dot{\rightarrow}\, b &= \dot{\neg}(a \,\dot{\wedge}\, \dot{\neg} b)\\
a \,\dot{\rightarrow}\, b &= \dot{\neg} a \,\dot{\vee}\, b
\end{aligned}
$$

Dvě důležité spojky:

Shefferova ($\uparrow$, popř. $|$, NAND):

$\uparrow^{\cdot}$	0	1
0	1	1
1	1	0

Peirceova (také Nicodova, $\downarrow$, NOR):

$\downarrow^{\cdot}$	0	1
0	1	0
1	0	0

Všimněme si:

$$
\begin{aligned}
a \uparrow^{\cdot} b &= \neg^{\cdot}(a \wedge^{\cdot} b) \\
a \uparrow^{\cdot} b &= \neg^{\cdot} a \vee^{\cdot} \neg^{\cdot} b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \downarrow^{\cdot} b &= \neg^{\cdot} a \wedge^{\cdot} \neg^{\cdot} b \\
a \downarrow^{\cdot} b &= \neg^{\cdot}(a \vee^{\cdot} b)
\end{aligned}
$$

Každou ze spojek $\neg$, $\wedge$ a $\vee$ lze vyjádřit pomocí $\uparrow$ i pomocí $\downarrow$.

$$\begin{aligned}
\dot{\neg} a &= a \mathbin{\dot{\uparrow}} a \\
a \mathbin{\dot{\wedge}} b &= (a \mathbin{\dot{\uparrow}} b) \mathbin{\dot{\uparrow}} (a \mathbin{\dot{\uparrow}} b) \\
a \mathbin{\dot{\vee}} b &= (a \mathbin{\dot{\uparrow}} a) \mathbin{\dot{\uparrow}} (b \mathbin{\dot{\uparrow}} b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\neg} a &= a \mathbin{\dot{\downarrow}} a \\
a \mathbin{\dot{\wedge}} b &= (a \mathbin{\dot{\downarrow}} a) \mathbin{\dot{\downarrow}} (b \mathbin{\dot{\downarrow}} b) \\
a \mathbin{\dot{\vee}} b &= (a \mathbin{\dot{\downarrow}} b) \mathbin{\dot{\downarrow}} (a \mathbin{\dot{\downarrow}} b)
\end{aligned}$$

Úkol: Ověřte výše uvedené tabulkovou metodou. Vyjádřete podobně $\rightarrow$ a $\leftrightarrow$.

Funkčně úplné systémy spojek

Definice Množina $\{f_1, \dots, f_k\}$ booleovských funkcí je funkčně úplná, pokud každou $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ lze vyjádřit jako složení některých funkcí z $\{f_1, \dots, f_k\}$.
Množina výrokových spojek je úplná, jestliže je úplná množina jejich pravdivostních funkcí.

Věta $\{\neg^\cdot, \wedge^\cdot, \vee^\cdot\}$ je funkčně úplná.
(Jinak řečeno: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je funkčně úplná.)

Důkaz Máme dokázat, že každou booleovskou funkci f lze získat složením $\neg^\cdot$, $\wedge^\cdot$ a $\vee^\cdot$.
To plyne z věty o ÚDNF (i z věty o ÚKNF):

K libovolné funkci f existuje odpovídající ÚDNF φ. Její pravdivostní funkce $\varphi^\cdot$ je složená z $\neg^\cdot$, $\wedge^\cdot$ a $\vee^\cdot$. □

Následující tvrzení je zřejmé:

Lemma Je-li možné každou z $\{f_1, \ldots, f_k\}$ vyjádřit jako složení některých z $\{g_1, \ldots, g_l\}$, pak je-li $\{f_1, \ldots, f_k\}$ funkčně úplná, je i $\{g_1, \ldots, g_l\}$ funkčně úplná.

Např.: Každou ze spojek z $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$ lze vyjádřit složením logických funkcí z $\{\dot{\neg}, \dot{\rightarrow}\}$ (např. $a \dot{\vee} b = \dot{\neg} a \dot{\rightarrow} b$). Protože je $\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$ úplná, je dle lemma i $\{\dot{\neg}, \dot{\rightarrow}\}$ úplná.

Z uvedených vztahů o vzájemném vyjadřování spojek a z uvedeného lemma tedy plyne:

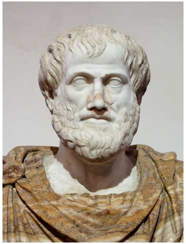
Věta Následující množiny logických funkcí jsou funkčně úplné:
$\{\dot{\neg}, \dot{\wedge}\}$, $\{\dot{\neg}, \dot{\vee}\}$, $\{\dot{\neg}, \dot{\rightarrow}\}$, $\{\dot{\uparrow}\}$, $\{\dot{\downarrow}\}$.

Ale: žádná z následujících množin není funkčně úplná:
$\{\dot{\neg}\}$, $\{\dot{\wedge}\}$, $\{\dot{\vee}\}$, $\{\dot{\wedge}, \dot{\vee}\}$, $\{\dot{\rightarrow}\}$, $\{\dot{\leftrightarrow}\}$, $\{\dot{\neg}, \dot{\leftrightarrow}\}$.

Pokuste se zdůvodnit proč (poslední tři jsou obtížnější).

Z dějin logiky

Aristotelés (384–322 př. n. l.)
zakladatel logiky



– směr, kterým se logika ubírala až do 19. století (aristotelovská logika)
– sylogismy:

$$\frac{\begin{array}{l}\text{Každý člověk je smrtelný.}\\ \text{Sókratés je člověk.}\end{array}}{\text{Sókratés je smrtelný.}}$$

– oddělil formu a obsah

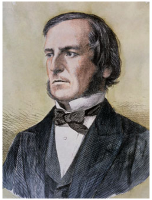
mezi Aristotelem a 19. stoletím

- středověk: logika a scholastici
- raný novověk: moderní úvahy od praktickém využití logiky

  např. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716):

  - lidské myšlení je možné redukovat na matematické výpočty
  - univerzální jazyk, *characteristica universalis*, ve kterém mělo být možné pracovat s matematickými a vědeckými pojmy
  - koncept zařízení, tzv. *calculus ratiocinator*, které mělo provádět příslušné výpočty

George Boole (1815–1864)



- revoluční kniha The Laws of Thought (Zákony myšlení)
- matematický přístup k logice
- vliv: hlavní směr moderní logiky se nazývá Booleova logika

2. pol. 19. století

- matematizace logiky
  - formalizace a používání matematických metod
  - logika jako metodický základ pro matematiku a exaktní vědy
- významní logici:
  - Gottlob Frege (1848–1925),
  - Giuseppe Peano (1858–1932),
  - Charles Sanders Peirce (1839–1914),
  - David Hilbert (1862–1943)
- začal vznikat logický kalkul, který později podrobně popsali Bertrand Russell (1872–1970) a Alfred Whitehead (1887–1974): *Principia Mathematica* (1910–1913)
- vyvinula se z něj moderní predikátová logika
- předmětem intenzívního zkoumání v 1. pol. 20. stol.

1. pol. 20. stol.

– významné objevy v logice:
  – možnosti (objevena axiomatizace)
  – meze formálních systémů (nerozhodnutelnost, neúplnost)
  – výpočetní aspekty logiky

– významní logici:

Kurtl Gödel (1906–1978)

Alonzo Church (1903–1955)

Alan Turing (1912–1954)

Nahlédnutí do dalších oblastí moderní logiky

Axiomatický systém logiky

- čistě syntaktický systém, ve kterém lze mechanickou manipulací se symboly z formulí logicky správně odvozovat další formule
- axiomatický systém výrokové logiku
  - axiomy:

$$\varphi \to (\psi \to \varphi)$$
$$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$$
$$(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$$

  - odvozovací pravidlo (tzv. modus ponens)

$$\frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi} \qquad \text{(z } \varphi \text{ a } \varphi \to \psi \text{ odvoď } \psi\text{)}$$

  - platí např. věta o úplnosti:
    Formule φ je odvoditelná z axiomů, právě když φ je tautologie.

Predikátová logika

- rozšíření výrokové logiky
- značně bohatší jazyk: relace, funkce, kvantifikátory, ...
- základ pro mnoho oblastí informatiky, např. relační databáze, umělá inteligence, logické programování

Logické programování a Prolog

- programování založené na predikátové logice
- program = množina logických formulí (předpoklady)
- spuštění programu:
  - uživatel položí dotaz (logická formule)
  - prologovský interpret zjistí, zda dotaz logicky vyplývá z předpokladů
  - založeno na algoritmech automatického dokazování
- pro programování expertních systémů

Fuzzy logika

- neklasická logika
- vznik 1965, Lotfi Zadeh (1921–2017)

- více pravdivostních hodnot, místo $\{0,1\}$ máme např. $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ nebo $[0,1]$
- proč: $||$ Zaběhnout 100 m za 13 sekund je vynikající výkon $|| = 0.8$
- mnoho aplikací:
  - fuzzy regulátory, expertní systémy
  - spotřební elektronika (pračky, kamery, myčky nádobí, ...)
  - automatické převodovky, řízení metra, ...
- výzkum na naší katedře