Diskrétní struktury 1

Množiny, relace, funkce

Radim Bělohlávek

KATEDRA INFORMATIKY
UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

Co jsou množiny, relace a funkce

- množina = matematický protějšek pojmu soubor (seskupení)
- relace = matematický protějšek pojmu vztah
- funkce = matematický protějšek pojmu přiřazení

Rada: S těmito pojmy je třeba se důkladně seznámit. Když formalismus množin, relací a funkcí dobře zvládnete, ušetříte si práci v dalším studiu. Navíc budete umět praktické problémy dobře „uchopit“ a popsat. Když naopak formalismus množin, relací a funkcí nezvládnete, budete se s tímto nedostatkem v dalším studiu neustále potýkat.

Pojem množiny

- Množina je objekt, který se skládá z jiných objektů, tzv. prvků množiny.
- Např. množina S všech sudých čísel větších než 1 a menších než 9, se skládá z čísel $2, 4, 6, 8$.
- Čísla $2, 4, 6, 8$ jsou prvky množiny S.
- Že se S skládá právě z prvků $2, 4, 6, 8$, zapisujeme
$$S = \{2, 4, 6, 8\}.$$

Značení:

- množiny zpravidla velkými písmeny $A, B, C, \dots, Z$
- prvky množin zpravidla malými písmeny $a, b, c, \dots, z$
- $x \in A$ znamená, že x je prvkem množiny A
  $x \notin A$ znamená, že x není prvkem množiny A

– Objekt do dané množiny buď patří, nebo nepatří.
– Množina je jednoznačně dána svými prvky.
– Nemá tedy smysl hovořit o pořadí prvků („první prvek množiny“, „druhý prvek množiny“ atd. nemá smysl).
– Nemá také smysl uvažovat, kolikrát je daný prvek v dané množině („prvek x je v dané množině A třikrát“ nemá smysl).

Prázdná množina

– speciální množina, značíme ji $\emptyset$, někdy $\{\ \}$
– neobsahuje žádný prvek, tedy pro každý x platí $x \notin \emptyset$

Číselné množiny

- $\mathbb{N}$ označuje množinu všech přirozených čísel; sestává z prvků $1, 2, 3, 4, 5, \dots$.
- $\mathbb{Z}$ označuje množinu všech celých čísel. $\mathbb{Z}$; sestává z prvků $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \dots$.
- $\mathbb{Q}$ označuje množinu všech racionálních čísel; sestává z celočíselných zlomků, tj. z čísel $\frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.
- $\mathbb{R}$ označuje množinu všech *reálných čísel*; oproti $\mathbb{Q}$ obsahuje i iracionální čísla, např. $\sqrt{2}, \pi$ apod.

Konečné a nekonečné množiny

Množina A se nazývá

- konečná, právě když existuje přirozené číslo n tak, že prvky této množiny lze jednoznačně očíslovat čísly $1, 2, \ldots n$.
  - n se přitom nazývá počet prvků množiny A
  - počet prvků značíme $|A|$, tj. $|A| = n$
  - např. množina $\{2, 4, 6, 8\}$ je konečná a je $|\{2, 4, 6, 8\}| = 4$
- nekonečná, není-li konečná
  - píšeme $|A| = \infty$
  - říkáme, že A má nekonečně mnoho prvků
  - např. množina $\mathbb{N}$ je nekonečná

Zapisování množin

Výčtem prvků

- Množina sestávající právě z prvků $a_1, \ldots, a_n$ se označuje $\{a_1, \ldots, a_n\}$.
- Příklad: $\{2, 4, 6, 8\}$
- Pro konečné. Někdy i pro nekonečné: $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (když je zřejmé pokračování)

Pomocí charakteristické vlastnosti

- Množina sestávající právě z prvků, které splňují vlastnost $\varphi(x)$, se označuje $\{x \mid \varphi(x)\}$.
- Příklad:
  - $\{x \mid x$ je přirozené číslo, které je sudé a menší než $10\}$, tedy jinak $\{2, 4, 6, 8\}$

Poznámky

- $\{2, 4, 6, 8\}$ je stejná jako $\{6, 2, 8, 4\}$ i jako $\{4, 2, 4, 6, 6, 8\}$
- $\{x \in X \mid \varphi(x)\}$ znamená $\{x \mid x \in X$ a $\varphi(x)\}$
  tedy $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Indexová množina

- Často se používá $\{a_i \mid i \in I\}$.
  Zde I je tzv. indexová množina a pro každý index $i \in I$ je a_i nějaký objekt. Pak $\{a_i \mid i \in I\}$ je množina

  $$\{x \mid \text{existuje } i \in I \text{ tak, že } x = a_i\}.$$

  $\{a_i \mid i \in I\}$ je tedy vlastně zápis pomocí charakteristické vlastnosti, neboť označuje množinu $\{x \mid \varphi(x)\}$, kde $\varphi(x)$ je „existuje $i \in I$, tak, že $x = a_i$“.
- Příklad: $I = \mathbb{N}$, $a_i = i^2$, pak $\{a_i \mid i \in I\}$ je množina druhých mocnin přirozených čísel, tj. $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$.
- Jiný zápis: $\{x \mid \exists y \in \mathbb{N} : x = y^2\}$.

Příklady

- $\{k \mid \exists n \in \mathbb{N} \,:\, k = 2^n\}$ označuje množinu všech kladných mocnin čísla 2. Stejnou množinu označuje $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$.
- $\{k \in \mathbb{N} \mid k \neq 1$ a jestliže $\exists m, n \in \mathbb{N} : m \cdot n = k,$ pak $m = 1$ nebo $n = 1\}$ označuje množinu všech prvočísel.
- $\{\{a, b\}, \{a\}, \{1, 2, 3, \{a, b\}\}\}$ je množina, která má tři prvky.

  Tyto prvky samy, tj. $\{a, b\}$, $\{a\}$, a $\{1, 2, 3, \{a, b\}\}$, jsou opět množiny. Množina tedy může obsahovat prvek, který je sám množinou. Ten sám může obsahovat prvky, které jsou množinami atd.
- $\{\emptyset\}$ je jednoprvková množina. Jejím jediným prvkem je $\emptyset$ (prázdná množina).
- Uvědomte si, že $\{\emptyset\}$ a $\emptyset$ jsou různé množiny.

  $\{\emptyset\}$ obsahuje jeden prvek, $\emptyset$ neobsahuje žádný.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ je čtyřprvková množina.

  Její prvky jsou $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

- Nechť $a_1 = p$, $a_2 = q$, $a_3 = r$, $a_4 = x$, $a_5 = y$, $a_6 = z$, $a_7 = 1$, $a_8 = r$, $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $J = \{1, 2, 3, 7, 8\}$. Pak $\{a_i \mid i \in I\}$ je množina $\{p, q, r, x\}$, $\{a_i \mid i \in J\}$ je množina $\{p, q, r, 1\}$.
- $\{2^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je zápis typu $\{a_i \mid i \in I\}$, kde $a_i = 2^i$, $I = \mathbb{N}$.

  Je to množina všech kladných mocnin čísla 2.

Příklad: vyjádření struktury množinovým zápisem

V nemocnici pracuje:

- ředitel (R),
- tři údržbáři (U_1, U_2, U_3),
- chirurgie: dva lékaři (C_1, C_2) a tři sestry (CS_1, CS_2, CS_3),
- ARO: dva lékaři (A_1, A_2) a dvě sestry (AS_1, AS_2),
- interna: tří lékaři (I_1, I_2, I_3) a čtyři sestry (IS_1, IS_2, IS_3, IS_4).

Pak strukturu zaměstnanců nemocnice popisuje množina

$$\{\{R\}, \{U_1, U_2, U_3\}, \{C_1, C_2, CS_1, CS_2, CS_3\},$$
$$\{A_1, A_2, AS_1, AS_2\}, \{I_1, I_2, I_3, IS_1, IS_2, IS_3, IS_4\}\}.$$

Jiná struktura:

$$\{\{R\}, \{U_1, U_2, U_3\}, \{C_1, C_2, A_1, A_2, I_1, I_2, I_3\},$$
$$\{CS_1, CS_2, CS_3, AS_1, AS_2, IS_1, IS_2, IS_3, IS_4\}\}.$$

Meze klasických množin

Ne každou slovně popsanou vlastnost lze použít k zápisu množiny.

$\{x \mid x$ je číslo udávající ve stupních Celsia vysokou letní teplotu v Česku$\}$

Problém: pojem „vysoká letní teplota v Česku" není bivalentní, je vágní (fuzzy).
Určité teploty mu vyhovují lépe, určité hůře.
Vágností se zabývá tzv. fuzzy logika a fuzzy množiny.

Naivní přístup a jeho meze

Náš přístup k množinám je naivní (intuitivní). Opíráme se o intuitivní pojem soubor (seskupení).

- výhoda: jednoduchost, srozumitelnost
- nevýhoda: vede k paradoxům (Russellův paradox)
  ve většině praktických situací ale ne
  řeší např. axiomatická teorie množin, popř. teorie typů

Russellův paradox

Normální množinou budeme rozumět množinu, které není prvkem sebe sama.
Množinu všech normálních množin označme N, tedy

$$N = \{x \mid x \notin x\}.$$

Je N normální? Tedy platí $N \in N$?

Je jasné, že buď (a) $N \in N$, nebo (b) $N \notin N$.

(a) Když $N \in N$, pak N splňuje vlastnost prvků množiny N, tedy splňuje $x \notin x$, tedy $N \notin N$.

(b) Když $N \notin N$, pak protože N splňuje vlastnost $x \notin x$, je dle definice normální a tedy patří do množiny všech normálních množin, tedy patří do N, tedy $N \in N$.

Odvodili jsme, že $N \in N$, právě když $N \notin N$. To je spor.

Russellův paradox má řadu populárních podob. Např. paradox holiče:
Ve městě je holič, který holí právě ty, kteří neholí sami sebe. Otázka: Holí holič sám sebe?

Vztahy mezi množinami

- rovnost $(=)$ a množinová inkluze $(\subseteq)$
- $A = B$ čteme „(množina) A se rovná (množině) B"
  $A \subseteq B$ čteme „(množina) A je podmnožinou (množiny) B"
- definice:

  $$A = B \quad \text{znamená, že pro každý } x : x \in A, \text{ právě když } x \in B$$

  a

  $$A \subseteq B \quad \text{znamená, že pro každý } x : \text{ jestliže } x \in A, \text{ pak } x \in B.$$

- $A \neq B$ znamená, že neplatí $A = B$
  $A \not\subseteq B$ znamená, že neplatí $A \subseteq B$
- $A \subset B$ znamená $A \subseteq B$ a $A \neq B$

Příklad

- $\{2\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je sudé prvočíslo}\}$,
- $\emptyset = \{k \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N} : 2k = 2n + 1\}$,
- $\{a, b, c, d\} = \{b, d, c, a\}$, $\{a, b, 1\} = \{1, a, a, b, b, b, 1\}$,
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$, $\{a, b\} \subseteq \{1, 2, a, b\}$,
- $\{a, \{a, b\}, \{\{a, 1\}, b\}\} \subseteq \{a, b, \{a, b\}, \{a, b, 1\}, \{\{a, 1\}, b\}\}$,
- $\{a, b\} \not\subseteq \{\{a, b, c\}\}$, $\{\{a, 1\}\} \not\subseteq \{a, b, 1, \{a\}, \{1\}\}$.

Věta (základní vlastnosti)

(a) $A = B$, právě když zároveň $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$;

(b) $\emptyset \subseteq A$;

(c) $A \subseteq A$;

(d) jestliže $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, pak $A \subseteq C$.

Důkaz ad (d): Předpokládejme $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$. Máme dokázat $A \subseteq C$, tedy že pro každý x platí, že když $x \in A$, pak $x \in C$.

Zvolme libovolný x a předpokládejme, že $x \in A$. Chceme ukázat $x \in C$.

Uděláme to následovně. Z $x \in A$ a z předpokladu $A \subseteq B$ plyne, že $x \in B$. Dále z $x \in B$ a z předpokladu $B \subseteq C$ plyne $x \in C$. $\square$

Potenční množina

Definice Potenční množina dané množiny X je množina, jejímiž prvky jsou právě všechny podmnožiny množiny X. Značí se 2^X. Tedy

$$2^X = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Příklad $X = \{a, b\}$. X má čtyři podmnožiny. Jsou to $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$ a $\{a, b\}$.Tedy

$$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Příklad

- Pro $X = \{a\}$ je $2^X = \{\emptyset, \{a\}\}$,
- pro $X = \{1,2,3\}$ je $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$,
- pro $X = \emptyset$ je $2^X = \{\emptyset\}$ (to si promyslete: jedinou podmnožinou množiny $\emptyset$ je $\emptyset$),
- pro $X = \{a, \{a\}\}$ je $2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\}$.

Věta Je-li X konečná, pak $|2^X| = 2^{|X|}$. Tedy potenční množina n prvkové množiny má právě 2^n prvků.

Důkaz Nechť $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Každou podmnožinu A množiny X můžeme zřejmě reprezentovat posloupností

$$b_1 \ldots b_n, \text{ kde } b_i = 1 \text{ když, } x_i \in X, \text{ a } b_i = 1 \text{ ,když } x_i \notin X.$$

Např. pro $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ a $A = \{x_1, x_3\}$ je $b_1 b_2 b_3 = 101$.

Podmnožin A je zřejmě právě tolik jako všech posloupností $b_1 \ldots b_n$ nul a jedniček. Těch je 2^n, protože b_1 může mít dvě hodnoty, nezávisle na tom b_2 dvě hodnoty, atd. To je celkem $2 \cdot \cdots \cdot 2$ (n krát), tedy 2^n, možností.

Operace s množinami

Definice Nechť A a B jsou množiny. Pak $A \cap B$ (průnik A a B), $A \cup B$ (sjednocení A a B) a $A - B$ (rozdíl A a B) jsou definovány následovně:

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a } x \in B\}, \\ A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}, \\ A - B &= \{x \mid x \in A \text{ a } x \notin B\}. \end{aligned}$$

Tedy

x patří do $A \cap B$, právě když x patří do A i do B;

x patří do $A \cup B$, právě když x patří do A nebo do B;

x patří do $A - B$, právě když x patří do A, ale nepatří do B.

A a B jsou disjunktní, když nemají společné prvky, tj. když $A \cap B = \emptyset$.
$\{1, 3, 5\}$ a $\{2, 4, 6, 8\}$ jsou disjunktní.

Množinové operace používáme v běžném uvažování.

Např. řekneme „samostatnost a logické uvažování jsou společné vlastnosti Jany a Aleny“. Z množinového pohledu tím myslíme následující.

Jana i Alena mají nějaké vlastnosti. Množinu rysů Jany označme J, množinu rysů Aleny označme A.

Množiny J a A jsou různé, např. označuje-li m vlastnost „je dobrá v matematice“, může být $m \in J$ (Jana je dobrá v matematice), ale $m \notin A$ (Alena není dobrá v matematice).

Označme s a l vlastnosti „samostatnost“ a „logické uvažování“. Označme dále $J \cap A$ množinu vlastností, které patří do J i do A. Pak „samostatnost a logické uvažování jsou společné vlastnosti Jany a Aleny“ vlastně znamená $s \in J \cap A$ a $l \in J \cap A$.

Příklad

- Pro $A = \{a, b, e\}$, $B = \{b, c, d\}$ je

$$A \cap B = \{b\}, A \cup B = \{a, b, c, d, e\}, A - B = \{a, e\},$$

- pro $A = \{1, 2, a, b\}$, $B = \{1, a\}$ je

$$A \cap B = \{1, a\}, A \cup B = \{1, 2, a, b\}, A - B = \{2, b\}, B - A = \emptyset,$$

- Pro $A = \{a\}$, $B = \{b, \{a\}\}$ je

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{a, b, \{a\}\},$$

- pro $A = \{\emptyset, a, \{a\}, \{a, b\}\}$, $B = \{b, \{a, \{b\}\}\}$ je

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = \{\emptyset, a, \{a\}, \{a, b\}, b, \{a, \{b\}\}\}, A - B = A, B - A = B.$$

Univerzum, doplněk

Často uvažujeme jednu množinu X, které říkáme univerzum (obor našich úvah) a pracujeme jen s množinami, které jsou podmnožinami X.

Např. uvažujeme univerzum X všech občanů České republiky a potom pracujeme s jeho podmnožinami (např. množina dětí z X, množina zaměstnaných apod.).

Je-li dáno univerzum X a $A \subseteq X$, pak doplněk (popř. *komplement*) množiny A je množina $X - A$ a značíme ji $\overline{A}$.

Např. pro $X = \{a, b, c, d, e\}$ je $\overline{\{a, c\}} = \{b, d, e\}$.

Sjednocení a průnik systému množin

Je-li $A = \{B_i \mid i \in I\}$ množina, jejíž prvky jsou opět množiny, definujeme

$$\bigcup A \;=\; \{x \mid \exists i \in I \;:\; x \in B_i\},$$

tedy $x \in \bigcup A$, právě když x patří do nějaké množiny, která je prvkem A.

Např. $\bigcup\{\{a,b,c\},\{a,1\},\{1,2\}\} = \{a,b,c,1,2\}$.

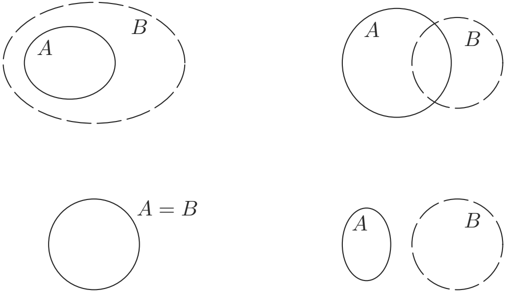
Podobně

$$\bigcap A \;=\; \{x \mid \forall i \in I \;:\; x \in B_i\},$$

Např. $\bigcap\{\{a,b,c\},\{a,1\},\{1,2\}\} = \{a\}$.

Vennovy diagramy

- schematický způsob znázorňování množin a vztahů mezi nimi
- John Venn (1834–1923), anglický logik
- množiny se znázorňují jako obrazce ohraničené kružnicemi, ovály apod.
- příklad:



  - vlevo nahoře: $A \subseteq B$,
  - vlevo dole: $A = B$,
  - vpravo dole: A a B disjunktní,
  - vpravo nahoře: A a B nejsou disjunktní

Věta Pro množiny A, B, C platí

$$
\begin{aligned}
A \cap \emptyset = \emptyset, &\qquad A \cup \emptyset = A \\
A \cup A = A, &\qquad A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A, &\qquad A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), &\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), &\qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\
A \cup (A \cap B) = A, &\qquad A \cap (A \cup B) = A
\end{aligned}
$$

Důkaz

Předně: Máme-li dokázat $A = B$, máme dle definice dokázat, že pro libovolný prvek x je $x \in A$, právě když $x \in B$. To lze dále rozložit na ověření toho, že z $x \in A$ plyne $x \in B$ a že z $x \in B$ plyne $x \in A$.

Dokažme $A \cup B = B \cup A$:

$x \in A \cup B$, právě když $x \in A$ nebo $x \in B$, právě když $x \in B$ nebo $x \in A$, právě když $x \in B \cup A$.

Při tom jsme použili, že $\varphi \vee \psi$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako $\psi \vee \varphi$; tedy $x \in A$ nebo $x \in B$ je pravda, právě když $x \in B$ nebo $x \in A$ je pravda.
To víme z výrokové logiky (viz sémanticky ekvivalentní formule).

Dokažme ještě $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$:

$x \in A \cap (B \cup C)$, právě když $x \in A$ a $x \in B \cup C$,
právě když $x \in A$ a ($x \in B$ nebo $x \in C$), což podle pravidel výrokové logiky platí,
právě když ($x \in A$ a $x \in B$) nebo ($x \in A$ a $x \in C$),
právě když $x \in A \cap B$ nebo $x \in A \cap C$, právě když $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Zde jsme použili, že $\varphi \wedge (\psi \vee \theta)$ má stejnou pravdivostní hodnotu jako $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$.

Zbytek viz [DS1].

Jednoduchost a jednoznačnost formalismu množin

K jednoduchosti:
Zkuste např. opisem (tj. v přirozeném jazyku, bez množinového formalismu) popsat množinu $(A \cap (B \cup (A \cap D))) \cup (B \cup E)$.

K jednoznačnosti:
„seskupení sudých a lichých čísel" nejspíš znamená sjednocení množiny sudých a množiny lichých čísel

ale „soubor malých a zelených mužíčků"?
1. možnost: soubor mužíčků, kteří jsou zároveň malí a zelení (průnik množiny malých mužíčků a množiny zelených mužíčků),
2. možnost: soubor mužíčků, kteří jsou malí nebo zelení (sjednocení množiny malých mužíčků a množiny zelených mužíčků).
Co přesně máme na mysli, vyplývá z kontextu nebo to musíme upřesnit.

Množinový formalismus je jednoznačný: $M \cap Z$ (1. možnost) vs. $M \cup Z$ (2. možnost)

Pojem relace

- je matematickým protějškem běžně používaného pojmu vztah
- různé objekty jsou nebo nejsou v různých vztazích:
  - číslo 3 je ve vztahu „být menší“ s číslem 5, ne však s číslem 2
  - Karel Čapek byl ve vztahu „být bratrem“ s Josefem Čapkem
  - tři body v rovině mohou být ve vztahu „ležet na jedné přímce“.
- relace je jedním ze základních pojmů používaných v informatice

Čím je vztah určen, jak ho formalizovat?

- arita vztahu, tj. počet objektů, které do vztahu vstupují
  „být bratrem“ má aritu 2 (binární)
  „ležet na jedné přímce“ má aritu 3 (ternární)
- množiny, mezi kterými je vztah definován
  „být bratrem“: mezi X_1 a X_2, přitom $X_1 = X_2$ je množina lidí
  „mít“: mezi množinou X_1 nějakých objektů a množinou X_2 nějakých věcí
  obecně n-ární vztah mezi $X_1, \ldots, X_n$
- vztah je potom určen tím, které prvky x_1 z $X_1, \ldots, x_n$ z X_n v tom vztahu jsou a které ne
- příklad: být bratrem (přednáška).
  .

Uspořádaná n-tice objektů $x_1, \ldots, x_n$ (v tomto pořadí):

- označuje se $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$
- $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_m \rangle$, právě když $n = m$ a $x_1 = y_1$, ..., $x_n = y_n$.

Definice Kartézský součin množin $X_1, \ldots, X_n$ je množina $X_1 \times \cdots \times X_n$ definovaná předpisem

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}.$$

- Je-li $X_1 = \cdots = X_n = X$, pak $X_1 \times \cdots \times X_n$, píšeme X^n (n-tá kartézská mocnina množiny X).
- Uspořádanou 1-tici $\langle x \rangle$ obvykle ztotožňujeme s prvkem x (tj. $\langle x \rangle = x$). Potom X^1 je vlastně množina X.

Příklad

- Pro $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$ je $A \times B = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\}$, $B^2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$,
- pro $A = \{\{a\}, b\}$, $B = \{1\}$ je $A \times B = \{\langle \{a\}, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$,
- pro $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $B = \{\emptyset\}$ je $A \times B = \{\langle \emptyset, \emptyset\rangle, \langle \{\emptyset\}, \emptyset\rangle\}$,
- pro $A = \{1, 2\}$, $B = \{b\}$ je $A \times B \times A = \{\langle 1, b, 1\rangle, \langle 1, b, 2\rangle, \langle 2, b, 1\rangle, \langle 2, b, 2\rangle\}$,
- pro $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$ je $A \times B = \emptyset$

  (neexistuje totiž uspořádaná dvojice $\langle x, y\rangle$ tak, aby $x \in A$ a $y \in B$).

Definice Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou množiny. Relace mezi $X_1, \dots, X_n$ je libovolná podmnožina kartézského součinu $X_1 \times \cdots \times X_n$.

- Tedy R je relace mezi $X_1, \dots, X_n$, právě když $R \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$.
- n je tzv. arita relace R, R se nazývá n-ární (1,2,3,4 $=$ unární, binární, ternární, kvaternární)
- O prvcích $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ říkáme, že jsou (v tomto pořadí) v relaci R, pokud $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R$.
- $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in R$ interpretujeme tak, že prvky $x_1, \dots, x_n$ mezi sebou mají vztah reprezentovaný relací R.

Příklad Nechť $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

- Následující R jsou binární relace mezi X a Y:
  - $R = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle\}$,
  - $R = \{\langle a, 2\rangle\}$,
  - $R = \emptyset$ (prázdná relace),
  - $R = X \times Y$ (plná relace).
- $R = \{\langle a, b, 2, 4, c\rangle, \langle a, a, 2, 2, a\rangle\}$ je relace mezi X, X, Y, Y, X.
- $\{\langle a, 1\rangle, \langle 2, c\rangle\}$ není binární relace mezi X a Y, protože $\langle 2, c\rangle \notin X \times Y$.

Příklad Na rodinné oslavě jsou Adam (A), Bedřich (B), Cyril (C), Dominik (D), Egon (E), Marta (M), Naďa (N), Olga (O), Pavla (P) a Radka (R).

Přitom A je synem C a M, C je synem E a O, P je dcerou D, E je synem A a R.

Určete binární relaci R, která odpovídá vztahu „X je dítětem Y“, a ternární relaci S, která odpovídá vztahu „X je dítětem Y a Z“, kde Y je otec a Z je matka.

Jde o relace na množině {A, B, C, D, E, M, N, O, P, R}. R bude obsahovat všechny uspořádané dvojice $\langle x, y \rangle$ takové, že x je dítětem y. Tedy

$$R = \{\langle \mathrm{A}, \mathrm{C} \rangle, \langle \mathrm{A}, \mathrm{M} \rangle, \langle \mathrm{C}, \mathrm{E} \rangle, \langle \mathrm{C}, \mathrm{O} \rangle, \langle \mathrm{P}, \mathrm{D} \rangle, \langle \mathrm{E}, \mathrm{A} \rangle, \langle \mathrm{E}, \mathrm{R} \rangle\}$$

a

$$S = \{\langle \mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{M} \rangle, \langle \mathrm{C}, \mathrm{E}, \mathrm{O} \rangle, \langle \mathrm{E}, \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle\}.$$

(pokračování)

Nyní navíc C je manželem M, E je manželem O a A je manželem R.

Uvažujme binární relaci T mezi množinou $X = \{$A, B, C, D, E$\}$ mužů a množinou $Y = \{$ M, N, O, P, R$\}$ žen, tj. $T \subseteq X \times Y$, která odpovídá vztahu „být manželem". Je

$$T = \{\langle \mathrm{C}, \mathrm{M} \rangle, \langle \mathrm{E}, \mathrm{O} \rangle, \langle \mathrm{A}, \mathrm{R} \rangle\}.$$

Příklad Zapište jako binární relaci vztah dělitelnosti (tj. „x dělí y“ znamená, že existuje celé číslo k tak, že $x \cdot k = y$) na množině $X = \{2, \ldots, 10\}$.

Příslušnou relaci označme D. Je tedy $D \subseteq X \times X$, konkrétně

$$D = \mathrm{id} \cup \{\langle 2,4 \rangle, \langle 2,6 \rangle, \langle 2,8 \rangle, \langle 2,10 \rangle, \langle 3,6 \rangle, \langle 3,9 \rangle, \langle 4,8 \rangle, \langle 5,10 \rangle\},$$

kde $\mathrm{id} = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \ldots, \langle 10,10 \rangle\}$.

Příklad (relace a databázové systémy)
Relace je základní pojem v tzv. relačním databázovém modelu (E. F. Codd)

Podstata: Databázovou tabulku chápeme jako relaci. Tabulka s údaji o zaměstnancích:

příjmení	jméno	narození	vzdělání	funkce
Adam	Jiří	1976	SŠ	prodejce
Kos	Jan	1961	VŠ	projektant
Malá	Magda	1955	SŠ	sekretářka
Rychlý	Karel	1967	VŠ	ředitel
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zahradník	Milan	1950	ZŠ	technik

Lze ji chápat jako 5-ární relaci R mezi množinami (tzv. doménami)
$D_1 = \{$Adam, Kos, Malá, Rychlý, $\dots\}$, $D_2 = \{$Jiří, Jan, Magda, Karel, $\dots\}$,
$D_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid 1900 \leq n \leq 2004\}$, $D_4 = \{$ZŠ, SOU, SŠ, VŠ$\}$,
$D_5 = \{$prodejce, projektant, sekretářka, ředitel, $\dots\}$.

příjmení	jméno	narození	vzdělání	funkce
Adam	Jiří	1976	SŠ	prodejce
Kos	Jan	1961	VŠ	projektant
Malá	Magda	1955	SŠ	sekretářka
Rychlý	Karel	1967	VŠ	ředitel
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Zahradník	Milan	1950	ZŠ	technik

Tedy $R \subseteq D_1 \times D_2 \times D_3 \times D_4 \times D_5$ a je

$$\begin{aligned} R \;=\; & \{\langle \text{Adam, Jiří, 1976, SŠ, prodejce}\rangle, \langle \text{Kos, Jan, 1961, VŠ, projektant}\rangle, \\ & \langle \text{Malá, Magda, 1955, SŠ, sekretářka}\rangle, \langle \text{Rychlý, Karel, 1967, VŠ, ředitel}\rangle, \\ & \vdots \\ & \langle \text{Zahradník, Milan, 1950, ZŠ, technik}\rangle\} \end{aligned}$$

Vztahy a operace s relacemi

Protože relace jsou množiny (relace je podmnožina kartézského součinu),

- lze s nimi provádět množinové operace ($\cap$, $\cup$, $-$),
- lze na ně aplikovat vztah inkluze ($\subseteq$).

Příklad

- Nechť $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, uvažujme binární relace $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 4\rangle\}$, $S = \{\langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\}$, $T = \{\langle a, 4\rangle, \langle c, 4\rangle\}$ mezi X a Y. Pak je např.

$$\begin{aligned} R \cap S &= \{\langle a, 4\rangle\}, \\ R \cup S &= \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 3\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle c, 4\rangle\}. \end{aligned}$$

  Dále je $T \subseteq R$, $R \not\subseteq S$ apod.

- Nechť $\leq$ je relace uspořádání a $|$ relace dělitelnosti na $\mathbb{N}$. Tedy:

$$\langle k,l\rangle \in \leq, \text{ právě když } k \text{ je menší nebo rovno } l,$$
$$\langle k,l\rangle \in |, \text{ právě když } l \text{ je dělitelné číslem } k$$

  Píšeme také $k \leq l$ a $k|l$ (infixová notace).

  Pak $| \subseteq \leq$, tj. relace $|$ je podmnožinou relace $\leq$.

  To znamená, že pro všechna přirozená čísla $k,l \in \mathbb{N}$ platí: když $k|l$, pak $k \leq l$.

- Jsou-li R_1 a R_2 relace popisující nějaké databázové tabulky, pak:
  - $R_1 \cup R_2$ je relace popisující tabulku, která vznikne sloučením výchozích tabulek, tj. zřetězením databázových tabulek (a vymazáním duplicitních výskytů databázových řádků).
  - $R_1 \cap R_2$ je relace, která popisuje společné položky obou tabulek.

Operace s binárními relacemi

S relacemi lze provádět i jiné operace než s obecnými množinami.

Binární relace: Lze znázorňovat tabulkami.

Např. relace $R = \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle a,4\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,4\rangle, \langle c,1\rangle\}$ mezi množinami $X = \{a,b,c\}$ a $Y = \{1,2,3,4\}$ je znázorněna takto:

R	1	2	3	4
a	$\times$	$\times$		$\times$
b		$\times$		$\times$
c	$\times$			

Tedy, je-li $\langle x,y\rangle \in R$, je v průsečíku řádku x a sloupce y symbol $\times$, jinak tam není nic.

Inverzní relace

Definice Inverzní relací k relaci $R \subseteq X \times Y$ je relace $R^{-1} \subseteq Y \times X$ definovaná předpisem

$$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}.$$

Příklad Nechť relace R mezi $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{1, 2, 3\}$ je $R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$. Pak inverzní relace k R je relace R^{-1} mezi Y a X daná $R^{-1} = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$.

Skládání relací

Definice Jsou-li $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$ relace, pak složením relací R a S je relace $R \circ S \subseteq X \times Z$ definovaná předpisem

$$R \circ S \;=\; \{\langle x, z\rangle \mid \text{existuje } y \in Y : \langle x, y\rangle \in R \text{ a } \langle y, z\rangle \in S\}.$$

Tedy $\langle x, z\rangle$ patří do relace $R \circ S$, právě když existuje prvek $y \in Y$ tak, že $\langle x, y\rangle$ jsou v relaci R a $\langle y, z\rangle$ jsou v relaci S.

Příklad Nechť $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ a $Z = \{\Box, \triangle\}$, dále

$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 4\rangle\}$ a $S = \{\langle 1, \Box\rangle, \langle 1, \triangle\rangle, \langle 2, \Box\rangle, \langle 3, \triangle\rangle, \langle 4, \Box\rangle, \langle 4, \triangle\rangle\}$

Pak

$R \circ S = \{\langle a, \Box\rangle, \langle a, \triangle\rangle, \langle b, \Box\rangle, \langle c, \Box\rangle, \langle c, \triangle\rangle\}$.

Skládání relací je přirozená operace, kterou běžně používáme:

X množina pacientů, Y množina příznaků nemocí, Z množina nemocí.

Nechť $R \subseteq X \times Y$ je relace „mít příznak“,
tj. $\langle x, y \rangle \in R$ znamená, že pacient x má příznak y,

$S \subseteq Y \times Z$ je relace „být příznakem“,
tj. $\langle y, z \rangle \in S$ znamená, že y je příznakem nemoci z (teplota je příznakem chřipky).

Pak $\langle x, z \rangle \in R \circ S$ znamená, že existuje příznak $y \in Y$ tak, že pacient x má tento příznak a zároveň je tento příznak příznakem nemoci z.

Tedy $\langle x, z \rangle \in R \circ S$ můžeme interpretovat jako „pacient x může mít nemoc z“.

Příklad $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (pacienti),

$Y = \{b, h, k, o, r, s, v, z\}$ (b . . . bolest hlavy, h . . . horečka, k . . . bolest končetin, o . . . oteklé žlázy na krku, r . . . rýma, s . . . strnulý krk, v . . . vyrážka, z . . . zvracení),

$Z = \{C, M, N, Sp, Za\}$ (C . . . chřipka, M . . . meningitida, N . . . plané neštovice, Sp . . . spalničky, Za . . . zarděnky).

R	b	h	k	o	r	s	v	z
1		×			×			
2		×						
3	×	×	×	×	×	×	×	×
4							×	
5		×			×		×	
6	×	×	×		×			
7	×	×				×		×

S	C	M	N	Sp	Za
b	×	×			
h	×	×		×	
k	×				
o					×
r	×			×	
s		×			
v			×	×	×
z		×			

$R \approx$ data zjištěná vyšetřením $\quad S \approx$ lékařská znalost

R	b	h	k	o	r	s	v	z
1		×			×			
2		×						
3	×	×	×	×	×	×	×	×
4							×	
5		×			×		×	
6	×	×	×		×			
7	×	×				×		×

S	C	M	N	Sp	Za
b	×	×			
h	×	×		×	
k	×				
o					×
r	×			×	
s		×			
v			×	×	×
z		×			

Z daných relací

odvodíme relaci:

$R \circ S$	C	M	N	S	Za
1	×	×		×	
2	×	×			
3	×	×	×	×	×
4			×	×	×
5	×	×	×	×	×
6	×	×		×	
7	×	×		×	

$R \circ S$ říká:
pacient 1 může mít chřipku, meningitidu nebo spalničky,
pacient 5 může mít libovolnou z uvažovaných nemocí (má všechny sledované příznaky),
atd.

Věta Pro relace $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$, $T \subseteq Z \times U$ platí.

$$\begin{aligned} R \circ (S \circ T) &= (R \circ S) \circ T \\ (R \circ S)^{-1} &= S^{-1} \circ R^{-1} \\ (R^{-1})^{-1} &= R \end{aligned}$$

Důkaz $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$:

$\langle x, u \rangle \in R \circ (S \circ T)$,

právě když existuje $y \in Y$ tak, že $\langle x, y \rangle \in R$ a $\langle y, u \rangle \in S \circ T$,

p.k. existuje $y \in Y$ tak, že $\langle x, y \rangle \in R$ a existuje $z \in Z$ tak, že $\langle y, z \rangle \in S$ a $\langle z, u \rangle \in T$,

p.k. existují $y \in Y$ a $z \in Z$ tak, že $\langle x, y \rangle \in R$, $\langle y, z \rangle \in S$, $\langle z, u \rangle \in T$,

p.k. existuje $z \in Z$ tak, že $\langle x, z \rangle \in R \circ S$ a $\langle z, u \rangle \in T$,

p. k. $\langle x, u \rangle \in (R \circ S) \circ T$.

$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$:

$\langle z, x\rangle \in (R \circ S)^{-1}$, p.k. $\langle x, z\rangle \in (R \circ S)$,

p.k. existuje $y \in Y$ tak, že $\langle x, y\rangle \in R$ a $\langle y, z\rangle \in S$,

p.k. existuje $y \in Y$ tak, že $\langle z, y\rangle \in S^{-1}$ a $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$,

p.k. $\langle z, x\rangle \in S^{-1} \circ R^{-1}$.

$(R^{-1})^{-1} = R$:

$\langle x, y\rangle \in (R^{-1})^{-1}$, právě když $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$, právě když $\langle x, y\rangle \in R$.

Další způsoby skládání relací

Předpokládejme opět, že $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$.
$R \lhd S$, $R \rhd S$ a $R \,\Box\, S$ jsou relace mezi X a Z definované předpisy

$$
\begin{aligned}
R \lhd S &= \{\langle x, z\rangle \mid \text{pro každé } y \in Y : \ \text{pokud } \langle x, y\rangle \in R, \ \text{pak } \langle y, z\rangle \in S\},\\
R \rhd S &= \{\langle x, z\rangle \mid \text{pro každé } y \in Y : \ \text{pokud } \langle y, z\rangle \in S, \ \text{pak } \langle x, y\rangle \in R\},\\
R \,\Box\, S &= \{\langle x, z\rangle \mid \text{pro každé } y \in Y : \langle x, y\rangle \in R, \ \text{právě když } \langle y, z\rangle \in S\}.
\end{aligned}
$$

Více viz [DS1].

Reprezentace relací

Chceme-li matematické pojmy zpracovávat v počítači, je třeba je vhodným způsobem v počítači reprezentovat.

Musíme tedy navrhnout, jak by měl být matematický pojem (množina, relace apod.) v počítači (tj. v paměti počítače) uložen.

Nejde jen o samotné uložení v paměti, nýbrž také o to, aby výpočty, které budou s danými pojmy prováděny, byly rychlé.

Reprezentace maticí (tabulkou)

Relaci $R \subseteq \{x_1, \ldots, x_m\} \times \{y_1, \ldots, y_n\}$ reprezentujeme maticí (tabulkou) $\mathbf{M}_R$.

$\mathbf{M}_R$ je definována předpisem

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \langle x_i, y_j \rangle \in R, \\ 0 & \text{je-li } \langle x_i, y_j \rangle \notin R\,. \end{cases}$$

Podobně tabulkou.

Příklad

$R = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle a, 4\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle b, 4\rangle, \langle c, 1\rangle\}$ mezi $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R	1	2	3	4
a	$\times$	$\times$		$\times$
b		$\times$		$\times$
c	$\times$			

Pro binární matice lze zavést operace, které odpovídají operacím s relacemi.

$$\mathbf{M} \vee \mathbf{N} = \mathbf{P}, \qquad p_{ij} = \max\{m_{ij}, n_{ij}\}$$
$$\mathbf{M} \wedge \mathbf{N} = \mathbf{P}, \qquad p_{ij} = \min\{m_{ij}, n_{ij}\}$$
$$\mathbf{M} - \mathbf{N} = \mathbf{P}, \qquad p_{ij} = \max\{0, m_{ij} - n_{ij}\}$$
$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{P}, \qquad p_{ij} = \max\{m_{il} \cdot k_{lj};\ l = 1, \dots, n\}$$
$$\mathbf{M}^T, \qquad m_{ij}^T = m_{ji}\ .$$

Platí (důkaz snadný, porovnáním definic, viz [DS1])

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_{R\cup S} &= \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_S \\
\mathbf{M}_{R\cap S} &= \mathbf{M}_R \wedge \mathbf{M}_S \\
\mathbf{M}_{R-S} &= \mathbf{M}_R - \mathbf{M}^S \\
\mathbf{M}_{R\circ U} &= \mathbf{M}_R \cdot \mathbf{M}_U \\
\mathbf{M}_{R^{-1}} &= (\mathbf{M}_R)^T
\end{aligned}$$

Příklad

Na $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ uvažujme relace $R = \mathrm{id}_X \cup \{\langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1, a_3\rangle, \langle a_3, a_2\rangle\}$ a $S = \{\langle a_1, a_1\rangle, \langle a_2, a_4\rangle, \langle a_3, a_4\rangle, \langle a_4, a_1\rangle\}$. Přitom $\mathrm{id}_X = \{\langle a_1, a_1\rangle, \dots, \langle a_4, a_4\rangle\}$.

Je

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice relací $R \cup S$, $R \cap S$, $R \circ S$ a R_{-1} tedy jsou:

$$\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_R \wedge \mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

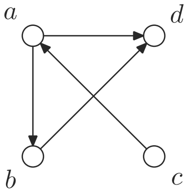
$$\mathbf{M}_R \cdot \mathbf{M}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{M}_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Reprezentace orientovaným grafem

Graf binární relace R na množině X:

- každý prvek $x \in X$ znázorníme jako kroužek (tzv. vrchol) s označením prvku
- pokud $\langle x, y\rangle \in R$, nakreslíme z kroužku x do kroužku y čáru s šipkou (tzv. hranu)

Graf reprezentující binární relaci $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle\}$ na množině $X = \{a, b, c, d\}$ (tedy $R \subseteq X \times X$):

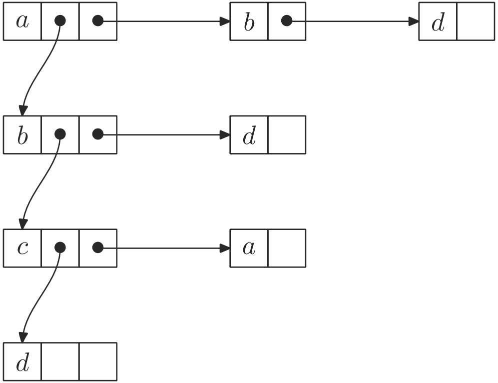


Rozmyslete, jak grafem reprezentovat relaci R mezi X a Y.
(Grafy podrobně později.)

Reprezentace seznamem seznamů

Je vhodná pro uložení binární relace R na množině X v paměti počítače.

Reprezentace relace $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle\}$ z předchozího příkladu:



Funkce (zobrazení)

- matematický protějšek pojmu přiřazení
- $x \mapsto \sin(x)$; majetek $\mapsto$ evidenční číslo
- přiřazení lze chápat jako množinu dvojic $\langle x, y \rangle$, kde y je objekt přiřazený objektu x
- tedy lze ho chápat jako binární relaci R splňující dodatečná omezení

Definice Relace $R \subseteq X \times Y$ se nazývá funkce (popř. zobrazení) množiny X do množiny Y, právě když pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ tak, že

pro každé $x \in X$ existuje $y \in Y$ tak, že $\langle x, y \rangle \in R$,

a pro každé $x \in X$ a $y_1, y_2 \in Y$ platí, že

$\langle x, y_1 \rangle \in R$ a $\langle x, y_2 \rangle \in R$ implikuje $y_1 = y_2$.

Pokud platí jen druhá podmínka, tj. může existovat $x \in X$, ke kterému neexistuje y tak, že $\langle x, y \rangle \in R$, nazývá se R parciální (částečná) funkce.

- Je-li $R \subseteq X \times Y$ funkce, píšeme také $R : X \to Y$.
- Používáme spíš $f, g, \ldots$ než $R, S, \ldots$.
- Je-li $f : X \to Y$ funkce a $x \in X$, pak prvek $y \in Y$, pro který je $\langle x, y \rangle \in f$, označujeme $f(x)$; píšeme také $x \mapsto y$, popř. $x \mapsto f(x)$.

Příklad $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b, 1, 2\}$

- $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$ není funkce X do Y, protože k prvku $c \in X$ neexistuje prvek $y \in Y$ tak, že $\langle c, y\rangle \in R$. R je parciální funkce.
- $R = \{\langle a, a\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, 2\rangle\}$ není funkce X do Y, protože k $c \in X$ existují dva různé prvky: $\langle c, a\rangle \in R$, $\langle c, 2\rangle \in R$.
- $R = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, 2\rangle\}$ je funkce X do Y.

- Někdy říkáme „uvažujme funkci $y = f(x)$“, např. $y = x^2$ apod.
- Přitom se má za to, že X a Y jsou zřejmé z kontextu (často je $X = Y = \mathbb{R}$).
- Pak jde vlastně o funkci $\{\langle x, y\rangle \mid x \in X, y \in Y, y = f(x)\}$.

Typy funkcí

Definice Funkce $f : X \to Y$ se nazývá

- prostá (někdy také injektivní), právě když pro každé $x_1, x_2 \in X$, že z $x_1 \neq x_2$ plyne $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- funkce množiny X na množinu Y (někdy také surjektivní), právě když pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ tak, že $f(x) = y$,
- vzájemně jednoznačná (někdy také bijektivní), právě když je prostá a je to funkce na množinu Y (tj. injektivní a surjektivní).

Příklad

- Pro $X = \{a, b, c, d\}$ a $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ je $f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 4\rangle, \langle d, 3\rangle\}$ funkce X do Y. f není injektivní (protože $f(a) = f(b)$, ale $a \neq b$), ani surjektivní (neexistuje $x \in X$ tak, aby $f(x) = 2$), a tedy ani bijektivní.
- Pro $X = \{a, b\}$ a $Y = \{1, 2, 3\}$ je $f = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 3\rangle\}$ funkce X do Y, která je injektivní, ale není surjektivní (neexistuje $x \in X$ tak, aby $f(x) = 2$), a tedy ani bijektivní.
- Pro $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{1, 2\}$ je $f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 1\rangle\}$ funkce X do Y, která není injektivní (protože $f(a) = f(b)$, ale $a \neq b$), ale je surjektivní, a tedy není bijektivní.
- Pro $X = \{a, b, c\}$ a $Y = \{1, 2, 3\}$ je $f = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 3\rangle\}$ funkce X do Y, která je injektivní i surjektivní, a i bijektivní.

Příklad

- $f = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ je funkce $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která není injekce (např. $(-2)^2 = 2^2$) ani surjekce (např. neexistuje $x \in \mathbb{R}$ tak, že $x^2 = -1$). Uvažujeme-li ji však jako funkci množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq 0\}$ (nezáporná reálná čísla), je to surjekce.
- $f = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^3\}$ je funkce $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která je injekcí i surjekcí, tj. je bijekcí.
- $f = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x!\}$ je funkce $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$ (faktoriál, tj. $x! = x \cdot (x-1) \cdots 2 \cdot 1$). Je to injekce, ale ne surjekce (např. číslo 3 není faktoriálem žádného čísla, tj. neexistuje $x \in \mathbb{N}$ tak, že $x! = 3$).

Věta Pro funkce $f, f_1, f_2 : X \to Y$, $g, g_1, g_2 : Y \to Z$ platí

a) $f \circ g$ je funkce.

b) Jsou-li f, g injekce, je $f \circ g$ injekce.

c) Jsou-li f, g surjekce, je $f \circ g$ surjekce.

Důkaz a) Nejprve musíme ukázat, že pro každé $x \in X$ existuje $z \in Z$ tak, že $\langle x, z\rangle \in f \circ g$. Protože je f funkce, existuje k $x \in X$ prvek $y \in Y$ tak, že $\langle x, y\rangle \in f$, a protože je g funkce, existuje k tomu y prvek $z \in Z$ tak, že $\langle y, z\rangle \in g$. Podle definice je tedy $\langle x, z\rangle \in f \circ g$.

Nyní musíme ukázat, že když $\langle x, z_1\rangle \in f \circ g$ a $\langle x, z_2\rangle \in f \circ g$, pak $z_1 = z_2$. Když $\langle x, z_1\rangle \in f \circ g$ a $\langle x, z_2\rangle \in f \circ g$, pak podle definice pro nějaké $y_1, y_2 \in Y$ je $\langle x, y_1\rangle \in f$, $\langle y_1, z_1\rangle \in g$, a $\langle x, y_2\rangle \in f$, $\langle y_2, z_2\rangle \in g$. Protože f je funkce, musí být $y_1 = y_2$, a protože g je funkce, musí být $z_1 = z_2$. Tedy *a*) platí.

b) Předpokládejme $x_1 \neq x_2$.
Protože f je injekce, je i $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Protože g je injekce, je $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$.
Vzhledem k tomu, že $g(f(x_1)) = (f \circ g)(x_1)$ a $g(f(x_2)) = (f \circ g)(x_2)$, jsme tvrzení dokázali.

c) se dokáže podobně.

Funkce a výpočty

Shrnutí

- uspořádaná n-tice, kartézský součin,
- relace,
- binární relace, inverzní relace, skládání binárních relací, reprezentace binárních relací,
- funkce, injekce, surjekce, bijekce,

BINÁRNÍ RELACE NA MNOŽINĚ

Založeno na kapitole „Binární relace na množině“ textu R. Bělohlávek, V. Vychodil: Diskrétní matematika 1, 2

- binární relace na množině X jsou binární relace $R \subseteq X \times X$
- matematický protějšek vztahu mezi prvky množiny X
- „x je menší než y“, „x má stejnou barvu jako y“, „x nezávisí na y“, ...
- speciální relace
  - $\emptyset$ (prázdná relace),
  - $\{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$ (identita, id_X)
  - $X \times X$ (plná relace)

Mnohé binární relace mají podobné vlastnosti:

– binární relace R na $\mathbb{N}$:

$$R = \{\langle m, n\rangle \mid m \text{ má stejný počet cifer jako } n\}.$$

– binární relace S na množině X lidí (z dané oblasti)

$$S = \{\langle x, y\rangle \mid \text{rozdíl měsíčních příjmů } x \text{ a } y \text{ je menší než } 10\,000 \text{ Kč}\}.$$

společné vlastnosti:

– pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\langle n, n\rangle \in R$
  pro každý $x \in X$ je $\langle x, x\rangle \in S$

– pokud $\langle m, n\rangle \in R$, pak i $\langle n, m\rangle \in R$
  pokud $\langle x, y\rangle \in S$, pak i $\langle y, x\rangle \in S$.

Důležité vlastnosti mají své názvy:

Vlastnosti binárních relací

Definice Binární relace R na množině X se nazývá

- reflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí $\langle x, x\rangle \in R$;
- symetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí: je-li $\langle x, y\rangle \in R$, pak $\langle y, x\rangle \in R$;
- tranzitivní, pokud pro každé $x, y, z \in X$ platí: je-li $\langle x, y\rangle \in R$ a $\langle y, z\rangle \in R$ pak $\langle x, z\rangle \in R$;
- antisymetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí: je-li ($\langle x, y\rangle \in R$ a $\langle y, x\rangle \in R$, pak $x = y$;
- irreflexivní, pokud pro každé $x \in X$ platí $\langle x, x\rangle \notin R$;
- asymetrická, pokud pro každé $x, y \in X$ platí: je-li $\langle x, y\rangle \in R$, pak $\langle y, x\rangle \notin R$;
- úplná, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $\langle x, y\rangle \in R$ nebo $\langle y, x\rangle \in R$.

Vlastnosti zapsané symbolicky:

- reflexivní: $(\forall x)\, \langle x, x\rangle \in R$;
- symetrická: $(\forall x)(\forall y)(\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R)$;
- tranzitivní: $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R) \to \langle x, z\rangle \in R]$;
- antisymetrická: $(\forall x)(\forall y)[(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R) \to x = y]$;
- irreflexivní: $(\forall x)\, \langle x, x\rangle \notin R$;
- asymetrická: $(\forall x)(\forall y)(\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \notin R)$;
- úplná: $(\forall x)(\forall y)(\langle x, y\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in R)$.

Příklad Jaké vlastnosti mají následující relace R na X?

- $X = \{a, b, c, d\}$,

$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle c, d\rangle, \langle d, d\rangle\}$$

R je
- reflexivní,
- antisymetrická,
- tranzitivní;

R není
- irreflexivní, protože je reflexivní (neplatí např. $\langle a, a\rangle \notin R$),
- symetrická, protože např. $\langle a, d\rangle \in R$, ale $\langle d, a\rangle \notin R$,
- asymetrická, protože např. $\langle a, a\rangle \in R$ a podle asymetrie by pak muselo být $\langle a, a\rangle \notin R$,
- úplná, protože např. není ani $\langle a, b\rangle \in R$, ani $\langle b, a\rangle \in R$.

Pozn.: Reflexivita není negací irreflexivity, neplatí tedy, že R je buď relfexivní nebo irreflexivní.

(pokračování)

- $X = \mathbb{Z}$, $R = \{\langle m, n\rangle \mid m - 2 \leq n\}$
  R je
  - reflexivní, protože $m - 2 \leq m$ pro každé m,
  - úplná, protože buď $m \leq n$ (a pak $m - 2 \leq n$, tj. $\langle m, n\rangle \in R$) nebo $n < m$ (a pak $\langle n, m\rangle \in R$);

  R není
  - symetrická, protože např. $\langle 2, 5\rangle \in R$, ale $\langle 5, 2\rangle \notin R$,
  - tranzitivní, protože např. $\langle 4, 3\rangle \in R$ a $\langle 3, 1\rangle \in R$, ale $\langle 4, 1\rangle \notin R$,
  - antisymetrická, protože např. $\langle 1, 3\rangle \in R$ a $\langle 3, 1\rangle \in R$, ale $1 \neq 3$,
  - irreflexivní, protože je reflexivní,
  - asymetrická, protože např. $\langle 1, 3\rangle \in R$ i $\langle 3, 1\rangle \in R$.

(pokračování)

- uvažujme znovu $X = \mathbb{N}$ a

$$R = \{\langle m, n\rangle \mid m \text{ má stejný počet cifer jako } n\}.$$

  R je reflexivní, symetrická, tranzitivní (ostatní vlastnosti nemá).

- uvažujme znovu X = množina lidí,

$$S = \{\langle x, y\rangle | \text{ rozdíl měsíčních příjmů } x \text{ a } y \text{ je menší než } 10\,000 \text{ Kč}\}.$$

  S je reflexivní a symetrická, ale obecně není tranzitivní.

(pokračování)

- speciální relace
  - $R = \emptyset$:
    je irreflexivní, symetrická, asymetrická, antisymetrická a tranzitivní;
    není úplná ani reflexivní.
  - $R = \mathrm{id}_X$, tj. $R = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$:
    reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní;
    není irreflexivní a není asymetrická.
    id_X je úplná, právě když $|X| = 1$
  - $R = X \times X$
    je reflexivní, symetrická, tranzitivní a úplná; není irreflexivní, není asymetrická; je antisymetrická, právě když $|X| = 1$

(pokračování)

- U množina, $X = 2^U$, uvažujme binární relaci R na 2^U:

$$R = \{\langle A, B\rangle \mid A \text{ je podmnožinou } B\}.$$

Tedy R je množinová inkluze $\subseteq$: $\langle A, B\rangle \in R$ iff $A \subseteq B$.

Věta (reformulace vlastností) Nechť R je binární relace na X. Pak

(a) R je reflexivní, právě když $\mathrm{id}_X \subseteq R$,
(b) R je symetrická, právě když $R = R^{-1}$,
(c) R je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$,
(d) R je antisymetrická, právě když $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_X$,
(e) R je irreflexivní, právě když $\mathrm{id}_X \cap R = \emptyset$,
(f) R je asymetrická, právě když $R \cap R^{-1} = \emptyset$,
(g) R je úplná, právě když $R \cup R^{-1} = X \times X$.

Důkaz

(a), (b), (d), (e), (f), (g) jsou zřejmé z definice.

Např. (a): Reflexivita R znamená, že pro každý $x \in X$ je $\langle x, x\rangle \in R$.
$\mathrm{id}_X \subseteq R$ znamená, že pro každou $\langle x, y\rangle \in X \times X$ platí: pokud $\langle x, y\rangle \in \mathrm{id}_X$, pak $\langle x, y\rangle \in R$, tj. každá dvojice $\langle x, y\rangle \in \mathrm{id}_X$ patří do R.
Ale $\langle x, y\rangle \in \mathrm{id}_X$ je splněné právě pro dvojice s $x = y$, tedy $\mathrm{id}_X \subseteq R$ znamená, že pro každý $x \in X$ patří dvojice $\langle x, x\rangle$ do R, což je ekvivalentní s tím, že R je reflexivní.

(b), (d), (e), (f), (g) obdobně (dokažte sami, cvičení)

(c): Tedy R je tranzitivní, právě když $R \circ R \subseteq R$.

„$\Rightarrow$“: Nechť R je tranzitivní. Ukažme $R \circ R \subseteq R$.

Předpokládejme $\langle x, y\rangle \in R \circ R$. Pak existuje $z \in X$ tak, že $\langle x, z\rangle \in R$ a $\langle z, y\rangle \in R$. Z tranzitivity R plyne $\langle x, y\rangle \in R$.

„$\Leftarrow$“: Nechť $R \circ R \subseteq R$. Ukažme, že R je tranzitivní.

Nechť $\langle x, z\rangle \in R$ a $\langle z, y\rangle \in R$. Pak z definice $\circ$ je $\langle x, y\rangle \in R \circ R$. Tedy vzhledem k $R \circ R \subseteq R$ taky $\langle x, y\rangle \in R$. Tedy R je tranzitivní. $\square$

Vlastnosti relací v řeči matic a grafů

Uvažujme binární relaci R na X, jí odpovídající matici $\mathbf{M}_R$ a graf G_R.

- reflexivita R:
  $\mathbf{M}_R$: má na diagonále samé 1.
  G_R: má u každého vrcholu smyčku (hranu z vrcholu do stejného vrcholu)
- symetrie R:
  $\mathbf{M}_R$: je symetrická podle hlavní diagonály ($(\mathbf{M}_R)_{ij} = (\mathbf{M}_R)_{ji}$).
  G_R: vede-li hrana z x do y, vede i hrana z y do x.
- tranzitivita R:
  $\mathbf{M}_R$: najděte sami (není zcela přímočaré)
  G_R: vede-li hrana z x do y a hrana z y do z, vede i hrana z x do z.
- antisymetrie R:
  $\mathbf{M}_R$: dvě různé pozice symetrické podle hlavní diagonálny nemohou mít obě 1 (pro $i \neq j$ musí být $(\mathbf{M}_R)_{ij} = 0$ nebo $(\mathbf{M}_R)_{ji} = 0$).
  G_R: pro $x \neq y$ nemůže vést hrana z x do y i hrana z y do x.

- irreflexivita R:
  $\mathbf{M}_R$: má na diagonále samé 0.
  G_R: nemá u žádného vrcholu smyčku.
- asymetrie R:
  $\mathbf{M}_R$: dvě pozice symetrické podle hlavní diagonálny nemohou mít obě 1 (nelze, aby $(\mathbf{M}_R)_{ij} = 1 = (\mathbf{M}_R)_{ji}$).
  G_R: vede-li hrana z x do y, nevede hrana z y do x.
- úplnost R:
  $\mathbf{M}_R$: pro každé i, j je $(\mathbf{M}_R)_{ij} = 1$ nebo $(\mathbf{M}_R)_{ji} = 1$.
  G_R: mezi každými vrcholy x, y vede hrana (jedním nebo druhým směrem).

Mocnina R^n relace R

Analogie n-té mocniny čísla x vzhledem k násobení $\cdot$
například $x^3 = x \cdot (x \cdot x)$; obecně pak:

$$x^n = \begin{cases} x & \text{pokud } n = 1, \\ x \cdot x^{n-1} & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Nyní místo čísla x vezmeme relaci $R \subseteq X \times X$ a místo násobení čísel pak skládání relací:

Definice Nechť $R \subseteq X \times X$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme binární relaci $R^n \subseteq X \times X$:

$$R^n = \begin{cases} R & \text{pokud } n = 1, \\ R \circ R^{n-1} & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

R^n se nazývá n-tá mocnina R.

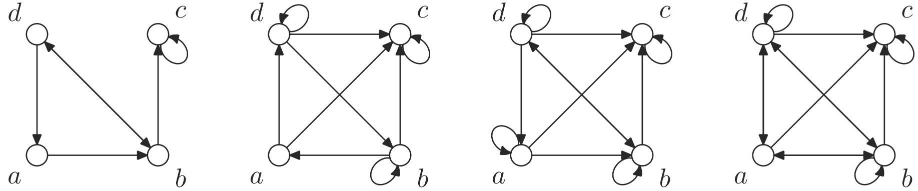
- Je tedy: $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R \circ (R \circ R)$, ...
- Vzhledem k asociativitě je tj. $R \circ (R \circ R) = (R \circ R) \circ R$.

  Závorky lze tedy vynechat a psát jen $R \circ R \circ R$, podobně pro R^4 atd.
- Tedy $\langle x, y\rangle \in R^n$, právě když existují $z_1, \dots, z_{n-1}$ tak, že

$$\langle x, z_1\rangle \in R, \langle z_1, z_2\rangle \in R, \dots, \langle z_{n-1}, y\rangle \in R.$$

- V řeči grafů: v grafu relace R^n je šipka z x do y, právě když je v grafu relace R sled n šipek jdoucí z x do y.

Příklad $X = \{a, b, c, d\}$, relace $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\}$.
Grafy relací R^n:



$\langle X, R\rangle$ $\quad$ $\langle X, R^2\rangle$ $\quad$ $\langle X, R^3\rangle$ $\quad$ $\langle X, R^4\rangle$

Např: v R^3 je šipka z a do c, protože v R se lze dostat z a do c přes 3 šipky.

Matice relací R^n:

$$\mathbf{M}^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{M}^{R^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{M}^{R^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{M}^{R^4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Věta Nechť R, S, T jsou binární relace na X, kde $S \subseteq T$. Pak

(a) $R \circ S \subseteq R \circ T$ a $S \circ R \subseteq T \circ R$,

(b) pokud je R tranzitivní, pak $R^n \subseteq R$ pro každé $n \in \mathbb{N}$,

(c) $R^m \circ R^n = R^{m+n} = R^n \circ R^m$ pro každé $m, n \in \mathbb{N}$,

(d) pokud X je konečná a $\langle x, y \rangle \in R^i$ pro nějaké $i > |X|$, pak $\langle x, y \rangle \in R^m$ pro nějaké $m \leq |X|$.

Důkaz Na přednášce a v [DS1].

Uzávěry binárních relací

- Je dána binární relace R na množině X.
- Jak vypadá nejmenší relexivní relace $\mathrm{Ref}(R)$, která obsahuje R?

  $\mathrm{Ref}(R)$ se nazývá relexivní uzávěr relace R.
- To samé pro tranzitivitu a symetrii.

Příklad:

- X = množina stavů nějakého systému (stavů výpočtu apod.),
- $\langle x, y\rangle \in R \ldots$ ze stavu x lze v jednom kroku přejít do stavu y
- je přirozené uvažovat relaci R': $\langle x, y\rangle \in R'$, p.k. existují $z_1, \ldots z_{n-1}$ tak, že $\langle x, z_1\rangle \in R$, že $\langle z_1, z_2\rangle \in R$, $\ldots$, $\langle z_{n-1}, y\rangle \in R$
- tedy ze stavu x se lze přes (přechodové) stavy $z_1, \ldots z_{n-1}$ dostat do stavu y.
- Popsaná relace R' je právě tranzitivní uzávěr $\mathrm{Tra}(R)$ relace R. Tedy nejmenší tranzitivní relace obsahující R.
- $\langle x, y\rangle \in R'$ znamená: ze stavu x se lze (přes případné další stavy) dostat do stavu y.

Definice Nechť R je binární relace na množině X.

- Nejmenší reflexivní relace obsahující R se nazývá reflexivní uzávěr relace R; značí se $\mathrm{Ref}(R)$.
- Nejmenší symetrická relace obsahující R se nazývá symetrický uzávěr relace R; značí se $\mathrm{Sym}(R)$.
- Nejmenší tranzitivní relace obsahující R se nazývá tranzitivní uzávěr relace R; značí se $\mathrm{Tra}(R)$.

Tedy $\mathrm{Ref}(R)$ je binární relace na X splňující

(a) $\mathrm{Ref}(R)$ je reflexivní.

(b) $R \subseteq \mathrm{Ref}(R)$ (tedy obsahuje R).

(c) Je-li S reflexivní relace na X taková, že $R \subseteq S$, pak $\mathrm{Ref}(R) \subseteq S$ (tedy $\mathrm{Ref}(R)$ je nejmenší ze všech reflexivních relací obsahujících R).

Stejně pro $\mathrm{Sym}(R)$ a $\mathrm{Tra}(R)$.

Věta Nechť R je binární relace na množině X. Pak

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ref}(R) &= R \cup \mathrm{id}_X,\\
\mathrm{Sym}(R) &= R \cup R^{-1},\\
\mathrm{Tra}(R) &= R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots, \text{ tedy } \mathrm{Tra}(R) = \textstyle\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i.
\end{aligned}$$

Důkaz $\mathrm{Ref}(R)$: V souladu s poznámkou pod definicí na předchozím slajdu ukážeme:

(a) $\mathrm{Ref}(R)$ je reflexivní: To je zřejmé, protože pro každé $x \in X$ je $\langle x, x\rangle \in \mathrm{id}_X$, tedy i $\langle x, x\rangle \in R \cup \mathrm{id}_X = \mathrm{Ref}(R)$.

(b) $R \subseteq \mathrm{Ref}(R)$: zřejmé.

(c) Je-li S reflexivní relace na X taková, že $R \subseteq S$, pak $\mathrm{Ref}(R) \subseteq S$:

Pro takovou S platí, že $\mathrm{id}_X \subseteq S$, což spolu s $R \subseteq S$ dává $R \cup \mathrm{id}_X \subseteq S$, neboli $\mathrm{Ref}(R) \subseteq S$.

$\mathrm{Sym}(R)$: podobně (viz [DS1]).

$\mathrm{Tra}(R)$: Stručně (detaily v [DS1]):

Opět ověřením (a), (b), (c) pro tranzitivitu.
(a) $\mathrm{Tra}(R)$ je tranzitivní.

(b) $R \subseteq \mathrm{Tra}(R)$: zřejmé.

(c) Je-li S tranzitivní relace na X taková, že $R \subseteq S$, pak $\mathrm{Tra}(R) \subseteq S$.

Vylepšení popisu $\mathrm{Tra}(R)$ pro konečné množiny (plyne také z (d) výše uvedené věty):

Věta Nechť R je binární relace na konečné X, kde $|X| = n$. Pak $\mathrm{Tra}(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$.

Důkaz Dle popisu ve výše uvedené větě je $\mathrm{Tra}(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Je tedy třeba ukázat, že nepotřebujeme mocniny R^i, kde $i > n$.

Když $i > n$, je $\langle x, y\rangle \in R^i$, p.k. pro nějaká $z_1, \dots, z_{i-1}$ a $z_i = y$ je

$\langle x, z_1\rangle \in R$, $\langle z_1, z_2\rangle \in R$, $\dots$, $\langle z_{i-1}, z_i\rangle \in R$.

Posloupnost $z_1, \dots, z_{i-1}, z_i$ má ale aspoň $n+1$ prvků, tedy existují $z_k = z_l$ pro nějaká $1 \le k < l$. Jejím vynecháním získáme kratší posloupnost

$\langle x, z_1\rangle \in R$, $\dots \langle z_{k-1}, z_k\rangle \in R$, $\langle z_k, z_l\rangle \in R$, $\dots$, $\langle z_{i-1}, z_i\rangle \in R$,

která vznikne odstraněním $(l-k)$ členů.

Prokazuje, že $\langle x, y\rangle = \langle x, z_i\rangle \in R^{i-(l-k)}$ a je $i-(l-k) < i$.

Pokud $i-(l-k) \le n$, jsme hotovi. Pokud $n < i-(l-k)$, zkrátíme posloupnost jako výše, až najdeme posloupnost prokazující $\langle x, y\rangle \in R^m$ pro nějaké $m \le n$.

Příklad $X = \{a, b, c, d\}$, relace $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle\}$.
Tedy:

$$\mathbf{M}^R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Ref}(R)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{\mathrm{Sym}(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}^{\mathrm{Tra}(R)} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}.$$

Je $\mathbf{M}^{\mathrm{Tra}(R)} = \mathbf{M}^R \vee \mathbf{M}^{R^2} \vee \mathbf{M}^{R^3} \vee \mathbf{M}^{R^4}$, tedy

$$\mathbf{M}^{\mathrm{Tra}(R)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro výpočet $\mathrm{Tra}(R)$ lze použít Warshallův algoritmus (1962, složitost $O(n^3)$).

poznámky na přednášce (nebude u zkoušky)

Ekvivalence

- jeden z nejdůležitějších typů binárních relací na množině
- je zobecněním rovnosti a je matematickým protějškem vztahu nerozlišitelnosti
- ekvivalentní = z určitého pohledu nerozlišitelné
- ukážeme základní pojmy a vlastnosti a vztah k tzv. rozkladům množin

Definice Binární relace E na množině X se nazývá ekvivalence, pokud je reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Pro prvek $x \in X$ se množina

$$[x]_E = \{y \in X \mid \langle x, y \rangle \in E\}$$

nazývá třída ekvivalence určená prvkem x.

Poznámky:

- $\langle x, y \rangle \in E$ někdy čteme „x je E-ekvivalentní y“. Vzhledem k symetrii, také „x a y jsou E-ekvivalentní.“
- $[x]_E$ ... prvky nerozlišitelné od x vzhledem k ekvivalenci E
- Zobecněním ekvivalence je tolerance – reflexivní a symetrická relace na množině.
- Tolerance je matematickým protějškem podobnosti. Zůstává problém: podobnost je věcí míry, není to klasická relace, ale fuzzy relace. To řeší fuzzy logika.

Příklad id_X a $X \times X$ jsou ekvivalence na X.

- id_X je nejmenší ekvivalence na X (každá jiná E splňuje $\mathrm{id}_X \subseteq E$).
  Třídy jsou jednoprvkové, tj. $[x]_{\mathrm{id}_X} = \{x\}$.
- $X \times X$ je největší ekvivalence na X (každá jiná E splňuje $E \subseteq X \times X$).
  Třída libovolného prvku je celá množina, tj. $[x]_{X \times X} = X$.

Příklad Na množině $X = \{a, b, c\}$ existuje pět relací ekvivalence:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{id}_X &= \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\},\\
E_1 &= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\},\\
E_2 &= \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\},\\
E_3 &= \{\langle a, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle\},\\
X \times X &= \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}.
\end{aligned}
$$

- E_i jsou inkluzí $\subseteq$ navzájem neporovnatelné, tj. např. neplatí $E_1 \subseteq E_2$ ani $E_2 \subseteq E_1$
- $[a]_{E_1} = \{a, b\}$, $[b]_{E_1} = \{a, b\}$, $[c]_{E_1} = \{c\}$,
- $[a]_{E_2} = \{a\}$, $[b]_{E_2} = \{b, c\}$, $[c]_{E_2} = \{b, c\}$,
- $[a]_{E_3} = \{a, c\}$, $[b]_{E_3} = \{b\}$, $[c]_{E_3} = \{a, c\}$.

Příklad Uvažujme binární relaci R na $\mathbb{R}$ definovanou takto:

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{R},\ |x| = |y|\}.$$

- R je zřejmě ekvivalence.
- $[x]_R = \{-x, x\}$.
- Tedy např. $[2]_R = \{-2, 2\}$, $[-5]_R = \{-5, 5\}$, $[0]_R = \{0\}$.

Příklad Nechť $n \in \mathbb{N}$. Uvažujme binární relaci $\equiv_n$ na $\mathbb{Z}$ definovanou takto:

$$\langle x, y \rangle \in \equiv_n, \text{ právě když } x \text{ a } y \text{ mají stejný zbytek po dělení číslem } n$$

- $\equiv_n$ je ekvivalence („modulo n“)
- Píšeme $x \equiv_n y$ (infixově).
  Jiný zápis: $x = y \pmod{n}$ nebo $x \equiv y \pmod{n}$.
- $0 \equiv_2 4$, $-2 \equiv_2 6$, $1 \equiv_2 -5$, $0 \not\equiv_2 1$, $0 \equiv_3 6$, $2 \equiv_3 14$, $3 \equiv_5 -12$,
- $[x]_{\equiv_n} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = x + qn \text{ pro nějaké } q \in \mathbb{Z}\}$
- $[1]_{\equiv_4} = \{-3, 5, -7, 9, \dots\}$

Věta o jednoznačnosti dělení se zbytkem: Pro každé $x \in \mathbb{Z}$ a $n \in \mathbb{N}$ existují jednoznačně určená $q \in \mathbb{Z}$ a $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tak, že $x = q \cdot n + r$.
Píšeme $r = x \bmod n$.

Příklad Nechť $f : X \to Y$ je zobrazení. Definujme relaci $\ker_f$ na X předpisem

$$\langle x_1, x_2 \rangle \in \ker_f, \text{ právě když } f(x_1) = f(x_2).$$

- $\ker_f$ je zřejmě ekvivalence.
- $\ker_f = \mathrm{id}_X$, právě když f je prosté.
  $\ker_f = X \times X$, právě když f zobrazí všechny prvky X na stejný prvek množiny Y.
- Důležitá interpretace. f přiřazuje objektům z X jejich charakteristiky. Charakteristiky jsou prvky z Y. Ekvivalentní jsou pak prvky, které mají stejné charakteristiky.
  Příklady:
  - X = množina lidí, $Y = \mathbb{R}$, $f(x)$ = výška x.
    $\langle x_1, x_2 \rangle \in \ker_f$, p.k. x_1 a x_2 mají stejnou výšku.
  - X = množina lidí, Y = {hnědá, modrá, zelená}, $f(x)$ = barva očí člověka x.
    $\langle x_1, x_2 \rangle \in \ker_f$, p.k. x_1 a x_2 mají stejnou barvu očí.
  - $X = \mathbb{Z}$, $Y = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $f(x)$ = zbytek po dělení x číslem n.
    $\langle x_1, x_2 \rangle \in \ker_f$, p.k. $x_1 \equiv_n x_2$ (výše uvedený příklad).
  - $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.
    $\langle x_1, x_2 \rangle \in \ker_f$, p.k. $|x_1| = |x_2|$ (výše uvedený příklad).

Rozklady

- rozklad $=$ matematický protějšek pojmu rozdělení (rozpadnutí se) prvků do skupin
- rozklad popisuje stejný fenomén jako ekvivalence, ale jiným způsobem
- rozklad (a ekvivalence) jsou základní prostředky pro popis procesu abstrakce
- celá čísla se rozpadnou na sudá a lichá

  abstraktní pojem sudé číslo $=$ množina všech sudých čísel

  abstraktní pojem liché číslo $=$ množina všech lichých čísel
- od $\mathbb{Z}$ přejdeme procesem abstrakce k $\{S, L\}$,

  kde $S = \{0, -2, 2, -4, 4, \dots\}$, $L = \{-1, 1, -3, 3 \dots\}$
- abstrakce?

  abstrahujeme od nepodstatného (konkrétní číslo) k podstatnému (jestli je sudé nebo liché)

Definice Nechť X je neprázdná množina. Rozklad Π na množině X je systém podmnožin množiny X, tj. $\Pi \subseteq 2^X$, splňující:

(a) každá $A \in \Pi$ je neprázdná;

(b) pro každé $A, B \in \Pi$: pokud $A \neq B$, pak $A \cap B = \emptyset$;

(c) $\bigcup_{A \in \Pi} A = X$.

Množiny $A \in \Pi$ se nazývají třídy rozkladu Π.

- Rozklad na X je tedy systém (tj. množina) neprázdných podmnožin množiny X, které jsou po dvou disjunktní a jejichž sjednocením je X.
- Pro $x \in X$ značíme $[x]_\Pi$ tu třídu rozkladu, která obsahuje x (tj. $x \in [x]_\Pi$). Ta je určena jednoznačně, protože dvě různé třídy nemají žádný společná prvek.

Příklad

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- $\Pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$ není rozklad na X.

  Nesplňuje (c):

  $\bigcup \Pi = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq X$.
- $\Pi = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ není rozklad na X.

  Nesplňuje (b):

  $\{1, 2, 3\} \cap \{3, 4\} \neq \emptyset$.
- $\{\{1, 5, 3\}, \{4\}, \{2, 6\}\}$ je rozklad na X.

Příklad

Dva hraniční rozklady na libovolné $X \neq \emptyset$.

- $\Pi = \{\{x\} \mid x \in X\}$.

  Třídy rozklady jsou právě všechny jednoprvkové podmnožiny množiny X.

- $\Pi = \{X\}$.

  Jedinou třídou rozkladu je sama množina X.

Příklad

$X = \{a, b, c, d\}$. Existuje právě 15 rozkladů na X:

$$
\begin{array}{llll}
\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\}, & \{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}, & \{\{b\},\{a,c\},\{d\}\}, & \{\{b\},\{c\},\{a,d\}\}, \\
\{\{a\},\{b,c\},\{d\}\}, & \{\{a,b,c\},\{d\}\}, & \{\{b,c\},\{a,d\}\}, & \{\{a\},\{c\},\{b,d\}\}, \\
\{\{a,c\},\{b,d\}\}, & \{\{c\},\{a,b,d\}\}, & \{\{a\},\{b\},\{c,d\}\}, & \{\{a,b\},\{c,d\}\}, \\
\{\{b\},\{a,c,d\}\}, & \{\{a\},\{b,c,d\}\}, & \{\{a,b,c,d\}\}. &
\end{array}
$$

Příklad

$X = \mathbb{Z}$ a dané $n \in N$.

- $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$,

  kde $\overline{r} = \{i \in \mathbb{Z} \mid$ zbytek po dělení i číslem n je $r\}$

  jinak řečeno $\overline{r} = \{i \in \mathbb{Z} \mid i = qn + r$ pro nějaké $q \in \mathbb{Z}\}$

- $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, kde

  $\overline{0}$ je množina všech sudých celých čísel,

  $\overline{1}$ je množina všech lichých celých čísel.

- $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \dots \overline{4}\}$, kde např.

  $\overline{0} = \{0, -5, 5. -10, 10, \dots\}$,

  $\overline{3} = \{3, 8, 13, \dots, -2, -7, -12, \dots\}$.

Příklad

$X = \mathbb{R}$.

- $\Pi = \{\{x, -x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$ je rozklad na $\mathbb{R}$.
- $\Pi = \{\mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$,

  kde $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{I}$ jsou množiny všech racionálních a iracionálních čísel.

Některé tyto rozklady připomínají některé dříve uvedené relace ekvivalence.

Mezi ekvivalencemi a rozklady je totiž důležitý vztah, který nyní rozebereme.

Ekvivalence vs. rozklady

Věta Nechť X je neprázdná množina.

(a) Je-li E ekvivalence na X, pak systém

$$\Pi_E = \{[x]_E \mid x \in X\}$$

je rozklad na X (indukovaný ekvivalencí E).

(b) Je-li Π je rozklad na X, pak binární relace E_Π na X definovaná

$$\langle x, y\rangle \in E_\Pi, \text{ právě když } [x]_\Pi = [y]_\Pi$$

je ekvivalence (indukovaná rozkladem Π).

(c) Platí $E = E_{\Pi_E}$ a $\Pi = \Pi_{E_\Pi}$.

- Rozklad Π_E se obvykle označuje X/E a nazývá se faktorová množina množiny X podle ekvivalence E.
- Z (c) plyne, že zobrazení $E \mapsto \Pi_E$ a $\Pi \mapsto E_\Pi$ jsou bijekce, navíc navzájem inverzní, mezi množinou všech ekvivalencí na X a množinou všech ekvivalencí na X.

Důkaz

přednáška (také [DS1]).

Příklad (ekvivalence a jim odpovídající rozklady)

- $X = \{a, b, c\}$

  $E = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
  $\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
  Je $\Pi = \Pi_E$ a také $E = E_\Pi$.

- $X = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

  E je $\equiv_n$, tj. $i \equiv_n j$, p.k. i a j mají stejný zbytek po dělení n
  $\Pi = \mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, kde $\overline{r} = \{i \in \mathbb{Z} \mid$ zbytek po dělení i číslem n je $r\}$
  Je $\Pi = \Pi_E$ a také $E = E_\Pi$.

Uspořádání

- s ekvivalencemi jeden z nejdůležitějších typů binárních relací na množině
- je zobecněním uspořádání čísel
- je matematickým protějškem pojmu hierarchie
- ukážeme základní pojmy, vlastnosti, grafické znázornění a typy uspořádání

Definice Binární relace R na množině X se nazývá uspořádání (někdy částečné uspořádání), pokud je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.
Uspořádání, které je navíc úplné, se nazývá lineární uspořádání.
$\langle X, R\rangle$ se nazývá uspořádaná množina.

Poznámky:

- R se obvykle značí $\leq$ a používá se infixový zápis, tedy $x \leq y$ místo $\langle x, y\rangle \in R$, tedy $\langle x, y\rangle \in \leq$.

  Čteme „x je menší nebo rovno y“.

- x a y se nazývají porovnatelné, pokud $x \leq y$ nebo $y \leq x$; jinak jsou neporovnatelné, píšeme $x \parallel y$.

- $y \geq x$ označuje $x \leq y$.

  $x < y$ se píše, místo $x \leq y$ a $x \neq y$.

- Zobecněním uspořádání je kvaziuspořádání – reflexivní a tranzitivní relace. Tj.:

  Ekvivalence je symetrické kvaziuspořádání. Uspořádání je antisymetrické kvaziuspořádání.

Příklad

- $\mathrm{id}_X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$ je uspořádání (tzv. antiřetězec).
  Každé dva prvky jsou neporovnatelné.
  Každé jiné uspořádání na X obsahuje id_X.
- $X = \{a, b, c, d\}$. Následující relace je lineární uspořádání na X (čtyřprvkový řetězec):

$$\mathrm{id}_X \cup \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$$

- $X = \{a, b, c, d\}$. Následující relace je uspořádání na X, které není lineární:

$$\mathrm{id}_X \cup \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle\}$$

Příklad

- $X = \mathbb{N}$. Přirozené uspořádání $\leq$ na X je lineární uspořádání. Podobně pro $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
- $X = \mathbb{N}$. Definujme relaci $|$ na X (dělitelnost)

  $$m|n, \text{ právě když existuje } k \in \mathbb{N} \text{ tak, že } n = k \cdot m.$$

  Je např. $2|4$, $2|8$, $2\not|9$, $6|24$, $1|n$ a $n|n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.
  $|$ je uspořádání na $\mathbb{N}$, které není lineární (např $3\not|4$ ani $4\not|3$).
- Pokud $m|n$, pak $m \leq n$. Tedy $| \subseteq \leq$.
- Definujme relaci $\preceq$ na $\mathbb{N}$ předpisem

  $$\begin{aligned} \preceq \quad = \quad & \{\langle m,n\rangle \mid m \text{ a } n \text{ jsou lichá a } m \leq n\} \cup \\ & \{\langle m,n\rangle \mid m \text{ a } n \text{ jsou sudá a } m \leq n\} \cup \\ & \{\langle m,n\rangle \mid m \text{ je liché a } n \text{ je sudé}\}. \end{aligned}$$

  $\preceq$ je lineární uspořádání na $\mathbb{N}$ odlišné od přirozeného uspořádání $\leq$.

Příklad $\subseteq$ je uspořádání na 2^X.

- Není lineární, např. $\{1,3\} \not\subseteq \{1,4\}$ a $\{1,4\} \not\subseteq \{1,3\}$, tedy $\{1,3\} \parallel \{1,4\}$.
- Inverzní relace, $\supseteq$ je také uspořádání.

Věta Je-li $\leq$ je uspořádání, je inverzní relace $\leq^{-1}$ (označovaná také $\geq$) uspořádání.

- Tvrzení je základem tzv. princip duality.
- Ke každému pojmu existuje pojem duální ($\leq$ v něm nahradíme $\leq^{-1}$).
- Ke každému tvrzení existuje tvrzení duální ($\leq$ v něm nahradíme $\leq^{-1}$).

Hasseovy diagramy

– Znázorňování konečných uspořádaných množin.
– Helmut Hasse (1898–1979)

Definice Prvek x je pokrytý prvkem y vzhledem k uspořádání $\leq$ na X, píšeme $x \prec y$, právě když
– $x < y$ a
– pro každý z platí: když $x \leq z \leq y$ pak $z = x$ nebo $z = y$.

Tedy $x \prec y$ znamená, že $x \leq y$ a mezi x a y jiný prvek neleží.

Příklad Uspořádání $\leq$ na $X = \{a, b, c\}$:

$$a \leq a,\ b \leq b,\ c \leq c,\ a \leq b,\ b \leq c,\ a \leq c$$

Příslušné pokrytí $\prec$:

$$a \prec b,\ b \prec c$$

Nakreslete.

$\prec$ vznikne z $\leq$ vynecháním „smyček“ $x \leq x$ a „tranzitivních hran.“

– Snadno se ukáže, že pro konečnou množinu X lze původní $\leq$ „zrekonstruovat“ z příslušného pokrytí $\prec$ takto:

$$\leq \; = \; \mathrm{Tra}(\mathrm{Ref}(\prec)),$$

tj. $\leq$ je tranzitivním uzávěrem reflexivního uzávěru svého pokrytí $\prec$.

– Obecně ne: Pro přirozené uspořádání $\leq$ na $\mathbb{R}$ je $\prec = \emptyset$, tedy $\mathrm{Tra}(\mathrm{Ref}(\prec)) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Hasseův diagram uspořádání $\leq$ na konečné množině X:

– Prvky $x \in X$ se znázorní jako kroužky.

– Je-li $x \leq y$, nakreslíme kroužek x níže než kroužek y.

– Je-li $x \prec y$, pojíme kroužky x a y úsečkou.

Příklad Uspořádání:

(a) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$,

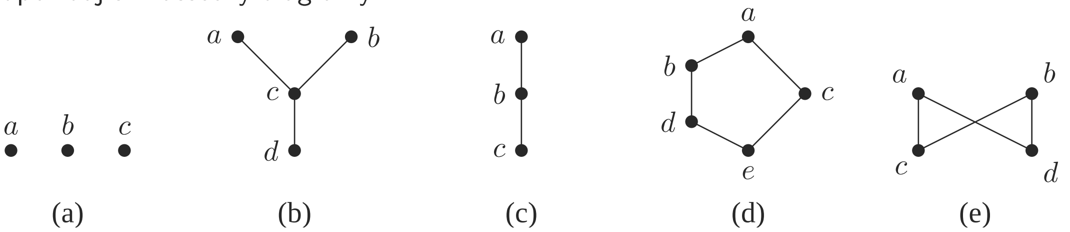
(b) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$,

(c) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$,

(d) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,d\rangle, \langle e,a\rangle, \langle e,b\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,d\rangle, \langle e,e\rangle\}$,

(e) $R = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,d\rangle\}$.

Odpovídající Hasseovy diagramy:



Význačné prvky uspořádaných množin

Definice Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina. Prvek $x \in X$ se nazývá

- minimální, jestliže pro každý $y \in X$ platí: pokud $y \leq x$, pak $x = y$,
- nejmenší, jestliže $x \leq y$ pro každý $y \in X$,
- maximální, jestliže pro každý $y \in X$ platí: pokud $y \geq x$, pak $x = y$,
- největší, jestliže $x \geq y$ pro každý $y \in X$.

Poznámky

- minimální a maximální jsou duální pojmy
- nejmenší a největší jsou duální pojmy
- minimální a nejmenší není to samé (maximální a největší není to samé)
- Platí: Je-li x nejmenší (největší), pak x je minimální (maximální); x je jediným minimálním (maximálním) prvkem.

Příklad $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

- 1 je nejmenší (a tedy i minimální),
- Maximální, a tedy ani největší, prvek neexistuje.

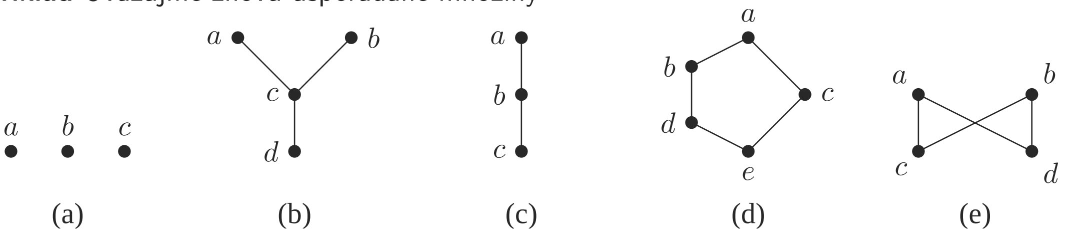
Příklad $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$.

- Minimální, a tedy ani nejmenší, prvek neexistuje.
- Maximální, a tedy ani největší, prvek neexistuje.

Příklad $\left\langle 2^X, \subseteq \right\rangle$.

- $\emptyset$ je nejmenší.
- X je největší.

Příklad Uvažujme znovu uspořádané množiny



(a) min: a, b, c, max: a, b, c, nejm: není, nejv: není

(b) min: d, max: a, b, nejm: d, nejv: není

(c) min: c, max: a, nejm: c, nejv: a

(d) min: e, max: a, nejm: e, nejv: a

(e) min: c, d, max: a, b, nejm: není, nejv: není

Princip duality

Platí-li tvrzení o uspořádaných množinách, platí i tvrzení k němu duální.

– Duální tvrzení vznikne nahrazením pojmů o uspořádaných množinách pojmy duálními.

– Tvrzení: V uspořádané množině $\langle X, \leq \rangle$ existuje nejvýše jeden největší prvek.

  Důkaz: Jsou-li x a y největší, pak $y \leq x$ (protože x je největší) i $x \leq y$ (protože y je největší). Z antisymetrie plyne $x = y$.

– Duální tvrzení: V uspořádané množině $\langle X, \leq \rangle$ existuje nejvýše jeden nejmenší prvek.

  To tedy platí dle principu duality.

Infimum a supremum

Důležité pojmy (v matematické analýze, v analýze dat a jinde).

Definice Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $A \subseteq X$. Definujeme

$$\mathcal{L}(A) = \{x \in X \mid x \leq y \text{ platí pro každé } y \in A\}, \tag{1}$$
$$\mathcal{U}(A) = \{x \in X \mid x \geq y \text{ platí pro každé } y \in A\}. \tag{2}$$

$\mathcal{L}(A)$ je tzv. dolní kužel množiny Y v $\langle X, \leq \rangle$. $\mathcal{U}(A)$ je horní kužel množiny Y v $\langle X, \leq \rangle$.

Prvky $x \in \mathcal{L}(A)$ se nazývají dolní hranice (meze) množiny A.
Prvky $x \in \mathcal{U}(A)$ se nazývají horní hranice (meze) množiny A.

Definice Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a $A \subseteq X$.

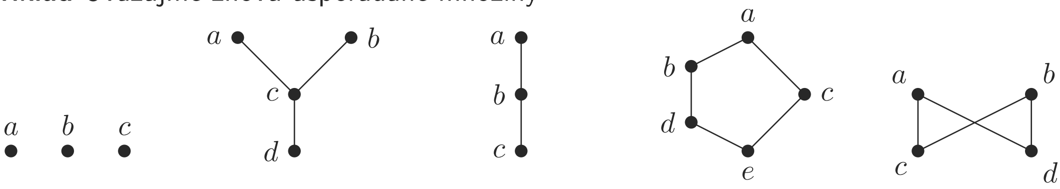
Má-li $\mathcal{L}(A)$ největší prvek, nazývá se infimum množiny A; značí se $\inf(A)$.

Má-li $\mathcal{U}(A)$ nejmenší prvek, nazývá se supremum mn. A; značí se $\sup(A)$.

Poznámka:

– Největší prvek v $\mathcal{L}(A)$ znamená největší v $\langle \mathcal{L}(A), \leq' \rangle$, kde $\leq'$ je zděděné uspořádání, tj. pro $x, y \in \mathcal{L}(A)$ je $x \leq' y$, p.k. $x \leq y$.
– Místo $\inf(A)$ se také píše $\bigwedge A$; místo $\bigwedge(\{x, y, z\})$ pak $x \wedge y \wedge z$;
– Místo $\sup(A)$ se také píše $\bigvee A$.
– Schéma pomocí Vennových diagramů (přednáška).

Příklad Uvažujme znovu uspořádané množiny



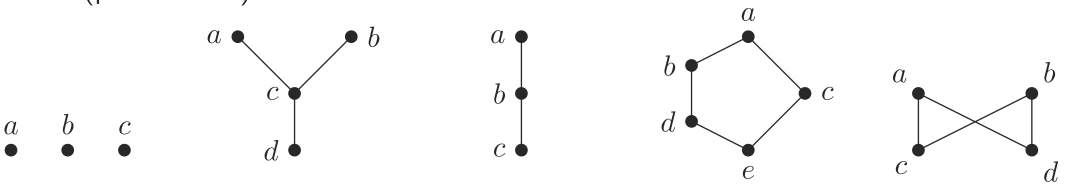
(a) (b) (c) (d) (e)

(a) $\mathcal{L}(\{a\}) = \{a\}$, $\mathcal{L}(\{a, c\}) = \emptyset$, $\mathcal{U}(\{b, c\}) = \emptyset$,
$\inf(\{a\}) = a$, $\inf(\{a, c\})$ neexistuje,

(b) $\mathcal{L}(\{a, b\}) = \{c, d\}$, $\mathcal{L}(\{a, b, c\}) = \{c, d\}$, $\mathcal{U}(\{a, b\}) = \emptyset$, $\mathcal{U}(\{d\}) = \{a, b, c, d\}$
$\inf(\{a, b\}) = c$, $\inf(\{c, d\}) = d$, $\inf(\{a, c\}) = c$,
$\sup(\{a, b\})$ neexistuje, $\sup(\{c, d\}) = c$, $\inf(\{a, c\}) = a$,

(c) $\mathcal{L}(\{a, b, c\}) = \mathcal{L}(\{b, c\}) = \mathcal{L}(\{c\}) = \{c\}$, $\mathcal{L}(\{a, b\}) = \{b\}$,
$\inf(\{a, b, c\}) = \inf(\{b, c\}) = \inf(\{c\}) = c$, $\sup(\{a, b, c\}) = a$,

Příklad (pokračování)



(a) (b) (c) (d) (e)

(d) $\mathcal{L}(\{a,b,c,d,e\}) = \{e\}$, $\mathcal{L}(\{b,c\}) = \{e\}$, $\mathcal{L}(\{d,c\}) = \{e\}$, $\mathcal{L}(\{b,d\}) = \{d,e\}$,
$\mathcal{U}(\{b,c\}) = \{a\}$, $\mathcal{U}(\{d,c\}) = \{a\}$, $\mathcal{U}(\{b,d\}) = \{a,b\}$,
$\inf(\{a,b,c,d,e\}) = e$, $\inf(\{b,c\}) = e$, $\inf(\{d,c\}) = e$, $\inf(\{b,d\}) = d$,
$b \vee c = a$, $b \vee c \vee d = a$,

(e) $\mathcal{L}(\{a,b\}) = \{c,d\}$, $\mathcal{L}(\{c,d\}) = \emptyset$,
$\inf(\{a,b\})$ neexistuje, protože $\mathcal{L}(\{a,b\})$ nemá největší prvek (c,d jsou jen maximální)
$\inf(\{c,d\})$ neexistuje, protože $\mathcal{L}(\{c,d\})$ nemá největší prvek ($\mathcal{L}(\{c,d\})$ je $\emptyset$).

Příklad

Uspořádaná množina $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, $x, y \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{L}(\{x\}) = (-\infty, x]$, $\mathcal{U}(\{x\}) = [x, \infty)$,
- $\mathcal{L}((x, y)) = \mathcal{L}([x, y)) = (-\infty, x]$, $\mathcal{U}(\{x\}) = [x, \infty)$,
- $\mathcal{L}(\{1, 2, 3, \dots\}) = (-\infty, 1]$, $\mathcal{U}(\{1, 2, 3, \dots\}) = \emptyset$,
- $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{U}(\mathbb{R}) = \emptyset$,
- $\inf((x, y)) = \inf([x, y)) = x$, $\sup(\{[x, y]\}) = y$,
- $\inf(\mathbb{R})$ ani $\sup(\mathbb{R})$ neexistují, protože $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \mathcal{U}(\mathbb{R}) = \emptyset$,
- $\inf((\sqrt{2}, 3)) = \sqrt{2}$.

Ale: v uspořádané množině $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ pro $(\sqrt{2}, 3) \subseteq \mathbb{Q}$ neexistuje $\inf((\sqrt{2}, 3))$. Proč?

Svazy

Definice Uspořádaná množina $\langle X, \leq \rangle$ se nazývá

- svaz, pokud $\inf(A)$ a $\sup(A)$ existuje pro každou neprázdnou konečnou $A \subseteq X$ (ekvivalentně: pokud $\inf(A)$ a $\sup(A)$ existuje pro každou dvouprvkovou $A \subseteq X$);
- úplný svaz, pokud $\inf(A)$ a $\sup(A)$ existuje pro každou $A \subseteq X$.

Příklad Pro libovolnou X je uspořádaná množina $\left\langle 2^X, \subseteq \right\rangle$ svaz (je i úplný), kde pro $A_1, \ldots, A_n \in 2^X$ je

$$\inf(\{A_1, \ldots, A_n\}) = A_1 \cap \cdots \cap A_n, \tag{3}$$

$$\sup(\{A_1, \ldots, A_n\}) = A_1 \cup \cdots \cup A_n. \tag{4}$$

Zdůvodněte.
Nakreslete Hasseův diagram $\left\langle 2^{\{a,b,c\}}, \subseteq \right\rangle$.

Příklad $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ je svaz, který není úplný.

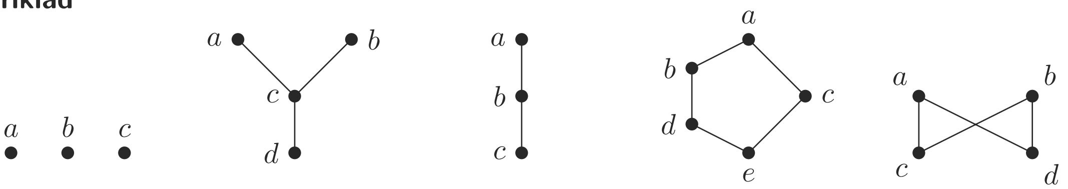
Pro $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ je
$\inf(\{x_1, \dots, x_n\}) =$ nejmenší z $x_1, \dots, x_n$,
$\sup(\{x_1, \dots, x_n\}) =$ největší z $x_1, \dots, x_n$.

Neexistují např. $\inf(\mathbb{R})$ ani $\sup(\mathbb{R})$.

Příklad Co je $\inf(\emptyset)$ a $\sup(\emptyset)$?
Pro uspořádanou množinu $\langle X, \leq \rangle$ platí, že

- $\inf(\emptyset)$ existuje, právě když $\langle X, \leq \rangle$ má největší prvek; v tom případě je $\inf(\emptyset)$ tím největším prvkem.
- $\sup(\emptyset)$ existuje, právě když $\langle X, \leq \rangle$ má nejmenší prvek; v tom případě je $\sup(\emptyset)$ tím nejmenším prvkem.

Příklad



(a) (b) (c) (d) (e)

(a) není svaz,

(b) není svaz (ale existují všechna infima, je to tzv. $\inf$-polosvaz),

(c) je svaz,

(d) je svaz,

(e) není svaz.

Zřejmě: Je-li X konečná, pak $\langle X, \leq \rangle$ je svaz, právě když $\langle X, \leq \rangle$ je úplný svaz.

Odbočka: konceptuální svazy a formální konceptuální analýza

- Rudolf Wille (TU Darmstadt)
- jak získat z binárních dat pojmy, které jsou tam ukryté?
- jak získat hierarchii těchto pojmů (podpojem-nadpojem)?
- formální koncept $= \langle A, B \rangle$

  $A =$ objekty spadající pod pojem, $B =$ atributy (vlastnosti) spadající pod pojem
- množina všech formálních konceptů v libovolných binárních datech tvoří úplný svaz, tzv. konceptuální svaz