Olomoucký informatický korespondenční seminář – Olinx

Matematická logika a strojové myšlení, 1. díl

Radim Bělohlávek

olinx.inf.upol.cz

1 Úvodem

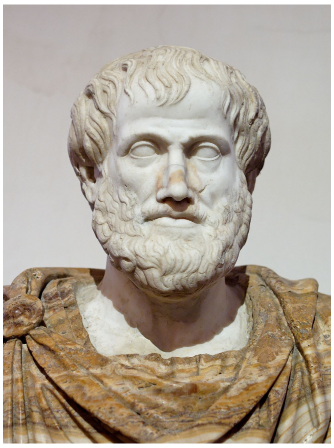
V tomto seriálu se seznámíme se základy matematické logiky, zaměříme se při tom na použití logiky v informatice. Řekneme si také něco o vývoji logiky, o logických paradoxech a hříčkách i o problémech, které jsou důležité, dlouho známé, ale dosud nevyřešené a otevřené. Budeme se také věnovat modernímu směru v logice, takzvané fuzzy logice, která má důležitý význam pro umělou inteligenci.

V tomto dílu se nejdříve stručně seznámíme s vývojem logiky a s tím, o co vlastně v logice jde. Pak se budeme věnovat základům klasické výrokové logiky.

Pokud se chce čtenář o probíraném tématu dovědět víc, doporučujeme například literaturu uvedenou v seznamu referencí [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

2 Předmět a stručný vývoj logiky

Logika se zabývá usuzováním, odvozováním nových tvrzení ze známých tvrzení, významem přirozeného jazyka a dalšími aspekty lidského myšlení. V soudobé logice přitom nejde o obsah myšlení, ale o obecná pravidla a principy, kterými se myšlení řídí. Za zakladatele logiky je považován řecký filozof Aristotelés (384–322 př. n. l., obr. 1). Od



Obrázek 1: Aristotelés (zdroj: Wikipedia).

Aristotelových dob prošla logika dlouhým vývojem, během kterého bylo dosaženo pozoruhodných výsledků. Abychom získali konkrétní představu, přiblížíme si některé milníky.

Sám Aristotelés učinil mnoho významných objevů a popsal řadu důležitých principů. Určil tak směr, kterým se logika ubírala až do 19. století a který je známý jako *aristotelovská logika.* Zavedl a zkoumal tzv. *sylogismy*, což jsou jisté typy logických úsudků. Příkladem je úsudek:

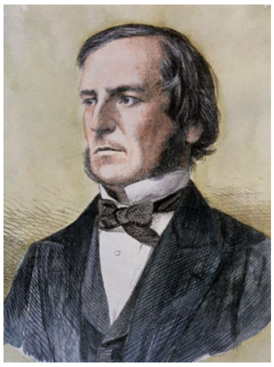
Každý člověk je smrtelný.
Sókratés je člověk.
―――――――――――
Sókratés je smrtelný.

Grafická úprava vyjadřuje, že z prvních dvou tvrzení logicky vyplývá třetí tvrzení. Sókratés si všiml, že je užitečné rozlišit *formu* a *obsah* zkoumaných tvrzení. Tak například úsudek

Každé sudé číslo je dělitelné dvojkou.
20 je sudé číslo.
―――――――――――
Číslo 20 je dělitelné dvojkou.

Logika, jak ji zavedl Aristotelés, se pak rozvíjela zhruba do 19. století, zkoumání však nepřinesla nic zásadně nového. Za zmínku ale stojí období středověku, ve kterém se objevily některé významnější nové metody a výsledky scholastických filozofů, a dále značně moderní úvahy některých filozofů raného novověku o možném praktickém využití logiky. Příkladem je německý filozof a matematik Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), který byl přesvědčen o tom, že lidské myšlení je možné redukovat na matematické výpočty. Pokoušel se navrhnout univerzální jazyk, tzv. *characteristica universalis*, ve kterém mělo být možné popsat důležité matematické a vědecké pojmy a pracovat s nimi, a dále teoretický koncept zařízení, tzv. *calculus ratiocinator*, které mělo provádět příslušné výpočty a pracovat tak s oním univerzálním jazykem. Leibnizovy představy byly do jisté míry uskutečněny až ve 20. století.

Další významné objevy přišly v 19. století. V roce 1854 publikoval George Boole (1815–1864, obr. 2) revoluční knihu



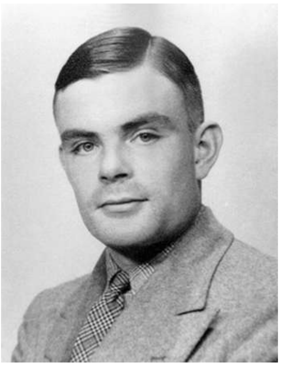
Obrázek 2: George Boole (zdroj: Wikipedia).

The Laws of Thought (Zákony myšlení), která je charakteristická důsledně matematickým přístupem k logice. O vlivu Boolea nejlépe svědčí fakt, že hlavní směr moderní logiky se nazývá Booleova, popř. booleovská logika. Ve 2. polovině 19. století a začátkem 20. století se logika matematizovala. Jednak se logika formalizovala a začaly se v ní používat matematické metody, jednak se logika začala zkoumat jako možný základ matematiky a exaktních věd. Tento vývoj ovlivnili zejména Gottlob Frege (1848–1925), Giuseppe Peano (1858–1932), Charles Sanders Peirce (1839–1914), David Hilbert (1862–1943) a další. V této době postupně vznikl logický kalkul, který popsali Bertrand Russell (1872–1970) a Alfred Whitehead (1887–1974) ve slavné knize *Principia Mathematica* (1910–1913). Předpokládalo se o něm, že představuje správný formální základ pro budování celé matematiky a že v zásadě představuje základní logiku, kterou člověk používá. Tento logický kalkul se tak stal předmětem intenzívního zkoumání.

Tento systém, tzv. klasickou predikátovou logiku, si i s některými jeho vlastnostmi ukážeme níže a také v dalších dílech našeho seriálu. Výsledky, kterých ve 20. až 40. letech 20. století, dosáhli Kurtl Gödel (1906–1978, obr. 3), Alonzo Church (1903–1955, obr. 4), Alan Turing (1912–1954, obr. 5) a další logici patří k vůbec nejcennějším výsledkům ma-

Obrázek 3: Kurt Gödel (zdroj: Princetonská univerzita).

Obrázek 4: Alonzo Church (zdroj: Princetonská univerzita).



Obrázek 5: Alan Turing (zdroj: Princetonská univerzita).

tematiky a informatiky. Je možné logiku, a tedy určitou část lidského myšlení, axiomatizovat? Tedy, existuje konečná sada základních tvrzení, tzv. axiomů, a sada jednoduchých odvozovacích pravidel (pravidel usuzování, viz např. výše uvedené sylogismy), tak, že tvrzení odvoditelná z axiomů jsou pravdivá a naopak, každé pravdivé tvrzení je odvoditelné? Gödel ukázal, že ano. Je možné, aby takové odvozování prováděl počítač? Tedy, aby počítač na základě nějakého algoritmu vždy správně rozhodl, zda tvrzení je odvoditelné z ostatních? Church a Turing dokázali, že takový algoritmus neexistuje.

Tento soubor příznivých a nepříznivých vlastností formálních logických systémů byl v dalších letech obohacován o další výsledky. Ve stále větší míře byl další vývoj logiky motivován rozvojem počítačů a vznikajícího nového oboru, informatiky. Logika našla uplatnění při konstrukci počítačů, při návrhu programovacích jazyků, ve vytváření expertních systémů a dalších oblastech umělé inteligence, i v řadě jiných oblastí informatiky. Vybrané partie logiky si v dalších částech našeho seriálu představíme podrobněji.

3 Klasická výroková logika

Výrokem rozumíme tvrzení (výpověď), u kterého má smysl uvažovat o jeho pravdivosti. Výrok může být zapsán v přirozeném jazyce, jako například výrok „Prší.“ nebo výrok „Jestliže prší, pak jsou silnice mokré.“ Může být také zapsán pomocí matematických symbolů, jako například výrok „$5+3>1$“. Výroky ale nejsou výrazy „kniha na stole“ nebo „$5+3$“, protože tyto výrazy nemohou být pravdivé ani nepravdivé. Je-li nějaký výrok pravdivý, jako třeba „$2+2=4$“, říkáme taky, že tento výrok má pravdivostní hodnotu 1; je-li nepravdivý, jako třeba „$2+2=5$“, říkáme, že má pravdivostní hodnotu 0 (1 tedy zastupuje pravdu, 0 nepravdu).

Z výroků můžeme vytvářet další výroky pomocí logických spojek. Například výrok „Prší a silnice jsou mokré.“ vznikl použitím spojky „a“ na výroky „Prší.“ a „Silnice jsou mokré.“ Použitím spojky implikace na tyto výroky (a v tomto pořadí) vznikne výrok „Jestliže prší, jsou silnice mokré.“ Výrok „Neprší.“, jinak také „Není pravda, že prší.“, vznikl použitím spojky negace na výše uvedený výrok, stejně tak výrok „Silnice nejsou mokré.“ Výroky, které nevznikly tímto způsobem pomocí logických spojek, se nazývají atomické (nedělitelné).

Klasická výroková logika se zabývá právě výše uvedenými výroky, tj. výroky, které mohou být pravdivé, nebo nepravdivé a které vznikly pomocí logických spojek z atomických výroků.

U některých výroků má smysl uvažovat o jejich pravdivosti, přesto ale výrok nemusí být jen pravdivý, nebo nepravdivý. Příkladem je výrok „Člověk s výškou 180 cm je vysoký.“ V tomto případě se zdráháme říct, že výrok je pravdivý i že je nepravdivý. Intuitivně bychom mu přiřadili pravdivostní hodnotu mezi 0 a 1, například hodnotu 0.8, abychom vyjádřili, že tento výrok je skoro pravdivý (pravdivý do značné míry, ale ne úplně). Takové výroky klasická výroková logika neuvažuje (tj. neumí s nimi pracovat), zabývá se jimi ale fuzzy logika.

Dalším aspektem, který klasická logika ignoruje, je čas, resp. výroky, jejichž pravdivostní hodnota závisí na čase. Příkladem je výrok „Zítra bude pršet.“ Takovými výroky za zabývá temporální logika (logika času). My budeme předpokládat, že pravdivostní hodnota výroku na čase nezávisí.

Posledním zjednodušujícím předpokladem, o kterém se zmíníme, je volba spojek. Kromě výše zmíněné spojky negace („Není pravda, že ... “) používáme v češtině i tzv. modální spojky. Příkladem jsou spojky „Je možné, že ... “ nebo „Je známo, že ... “ Pravdivostní hodnota výroku „Je možné, že prší.“ nezávisí jen na pravdivostní hodnotě výroku „Prší.“, jako tomu je u výroku „Není pravda, že prší.“ Tyto spojky tedy jsou složitější a klasická logika se jimi nezabývá.

Vidíme tedy, že klasická logika předpokládá určitá zjednodušení a nepokrývá vše, co se objevuje v přirozeném jazyce. Představuje ale základní logický kalkul a má mnoho důležitých použití.

V moderní logici nejde o *obsah*, ale o *formu* výroků. Například výroky

„Jestliže prší, pak jsou silnice mokré."

a

„Jestliže je pedál stlačen, auto brzdí."

mají různý obsah, ale stejnou formu. Tuto formu můžeme znázornit schématem

$$\varphi \to \psi.$$

Tato schémata, která znázorňují formy výroků, nazýváme formule. Atomické výroky se ve formulích označují tzv. výrokovými symboly, např. p, q, ..., logické spojky pak speciálními symboly jako je výše uvedený symbol $\to$ spojky implikace. Tyto symboly spolu se závorkami tvoří tzv. jazyk výrokové logiky. Shrňme to tedy:

Definice 1. *Jazyk výrokové logiky* se skládá z

- *výrokových symbolů* p, q, r, ..., popř. s indexy, p_1, p_2, ...; předpokládáme, že máme neomezeně mnoho (spočetně mnoho) výrokových symbolů;
- *symbolů výrokových spojek* $\neg$ (negace), $\to$ (implikace), popř. dále $\wedge$ (konjunkce), $\vee$ (disjunkce), $\leftrightarrow$ (ekvivalence);
- *pomocných symbolů* (,), [,], atd. (různé druhy závorek).

Ze symbolů jazyka tvoříme formule, jako např.

$$\neg p,\ p \vee q,\ (p \wedge q) \to (q \vee r), \tag{1}$$

podle přirozených syntaktických pravidel. Ta shrnuje následující definice:

Definice 2. Nechť je dán jazyk výrokové logiky. *Formule* daného jazyka výrokové logiky je definována následovně:

- každý výrokový symbol je formule (tzv. atomická formule);
- jsou-li φ a ψ formule, jsou i $\neg\varphi$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ a $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ formule.

Snadno se vidí, že posloupnosti uvedené v (1) jsou formule, zatímco např. pp, $((p\neg, \to p$ formule nejsou. Přijmeme dohodu, že pokud to půjde, budeme zápis formulí zjednodušovat. Například budeme vynechávat vnější závorky (konvence pro zjednodušování zápisu formulí ale detailně vysvětlovat nebudeme).

Přistoupíme teď k definici pravdivostní hodnoty formule. Uvědomme si, že o pravdivosti výroku „Číslo 4 je sudé a číslo 15 je dělitelné 3." můžeme rozhodnout jednak proto, že víme, jaký je význam konjunkce (tedy spojky „a"), jednak proto, že známe pravdivostní hodnoty atomických formulí. Pravdivostní hodnoty atomických formulí výrokové logiky, tedy symbolů p, q, ..., nijak dány nejsou. Musíme je tedy „nastavit". Toto nastavení zajišťuje tzv. pravdivostní ohodnocení:

Definice 3. *Pravdivostní ohodnocení* je libovolné přiřazení (tj. zobrazení) e, které každému výrokovému symbolu p přiřadí pravidvostní hodnotu $e(p)$ z množiny $\{0,1\}$.

Pokud je $e(p) = 0$, chápeme to tak, že výrok reprezentovaný symbolem p je nepravdivý, v případě $e(p) = 1$ pak, že je pravdivý.

Je-li dáno pravdivostní ohodnocení e, můžeme určit pravdivostní hodnotu libovolné formule postupným vyhodnocováním podle pravdivostních tabulek spojek výrokové logiky. Pro negaci je to tabulka

p	$\neg p$
0	1
1	0

,

pro zbývající spojky pak

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

,

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

,

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

,

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

.

Podle těchto tabulek, které definují význam logických spojek, snadno určujeme pravdivostní hodnoty libovolně složitých formulí. Uvažujme formuli $p \to (q \vee r)$ a předpokládejme, že je dáno ohodnocení e, pro které je $e(p) = 1$, $e(q) = 0$ a $e(r) = 0$. Podle tabulky pro disjunkci je formule $q \vee r$ nepravdivá, tj. má hodnotu 0. Podle tabulky pro implikaci, má hodnotu 0 i formule $p \to (q \vee r)$, protože p je pravdivá, ale $q \vee r$ nepravdivá. Všimněme si, že tabulky odpovídají tomu, jak spojky používáme v bežné mluvě (rozpaky může budit implikace: v běžné mluvě se např. se situací, kdy jsou oba výroky nepravdivé, nesetkáváme).

Uvědomme si a pro úplnost uveďme, že pravdivostní hodnotu formule můžeme tedy stručně definovat takto:

Definice 4. Nechť je dáno ohodnocení e. *Pravdivostní hodnota formule* φ při ohodnocení e, označujeme ji $e^*(\varphi)$, je definována následovně:

- $e^*(p) = e(p)$ pro každý výrokový symbol p;
- $e^*(\varphi \to \psi) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } e^*(\varphi) = 1 \text{ a } e^*(\psi) = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $e^*(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } e^*(\varphi) = 0 \text{ nebo } e^*(\psi) = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $e^*(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } e^*(\varphi) = 0 \text{ a } e^*(\psi) = 0, \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $e^*(\varphi \leftrightarrow \psi) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } e^*(\varphi) \neq e^*(\psi), \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

Protože díky pravidlu $e^*(p) = e(p)$ pravdivostní ohodnocení e^* rozšiřuje zadané ohodnocení e, píšeme většinou jen $e(\varphi)$ místo $e^*(\varphi)$.

Pravdivostní hodnoty formule při různých pravdivostních ohodnoceních popisuje *pravdivostní tabulka* této formule. Každý řádek této tabulky odpovídá jednomu možnému pravdivostnímu ohodnocení e výrokových symbolů, které se ve formuli φ vyskytují. V řádku jsou uvedeny hodnoty, které ohodnocení e přiřazují jednotlivým výrokovým symbolům a nakonec pravdivostní hodnota $e(\varphi)$ dané formule. Pravdivostní tabulka výše uvedené formule $p \to (q \vee r)$ tedy vypadá takto:

p	q	r	$p \to (q \vee r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Pokud je vyhodnocovaná formule složitější, může tabulka obsahovat další sloupce, do kterých si jako pomocné zapíšeme pravdivostní hodnoty podformulí dané formule. Například pravdivostní hodnota formule $(p \vee q) \to (q \to p)$ může vypadat takto:

p	q	$p \vee q$	$q \to p$	$(p \vee q) \to (q \to p)$
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Pravdivostní tabulka formule $p \to \neg(q \vee r)$ pak takto:

p	q	r	$q \vee r$	$\neg(q \vee r)$	$p \to \neg(q \vee r)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

Obsahuje-li formule 2 výrokové symboly, p a q, existují 4 způsoby, jak jim přiřadit pravdivostní hodnoty: Dvě možností pro p (0 a 1), dvě pro q, celkem tedy $2 \cdot 2 = 4$. Pro 3 symboly máme $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ možností, pro n symbolů pak 2^n možností. Tabulka formule s n symboly má tedy 2^n řádků (bez záhlaví tabulky).

Formule, která je vždy pravdivá (tj. pravdivá při všech pravdivostních ohodnoceních), se nazývá *tautologie*; formule, která je vždy nepravdivá, je *kontradikce*. Tabulka

p	q	r	$((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

ukazuje, že formule $((p \to q) \to (q \to r)) \to (p \to r)$ je tautologie; tabulka

p	$p \wedge \neg p$
0	0
1	0

ukazuje, že $p \wedge \neg p$ je kontradikce. Formule, které je pravdivá alespoň při jednom ohodnocení, se nazývá *splnitelná*. Například výše uvedená formule $p \to \neg(q \vee r)$ není ani tautologie ani kontradikce, protože pro některá ohodnocení je pravdivá a pro některá nepravdivá.

Definice 5. Nechť T je množina formulí a φ formule. Říkáme, že φ (*sémanticky*) *vyplývá z* T, pokud je φ pravdivá při každém ohodnocení, při kterém jsou pravdivé všechny formule z T; v tom případě píšeme

$$T \models \varphi.$$

Místo

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \varphi \quad \text{píšeme také} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$$

Pokud $\psi \models \varphi$ a $\varphi \models \psi$, říkáme, že formule ψ a φ jsou (*sémanticky*) *ekvivalentní*; v tom případě píšeme $\psi \equiv \varphi$.

Volně řečeno, $T \models \varphi$ znamená, že formule φ je pravdivá vždy, když je pravdivá každá formule z T. Uvědomme si, že $\psi \equiv \varphi$ znamená, že formule ψ a φ mají při každém ohodnocení stejnou pravdivostní hodnotu.

Zjistíme, zda platí

$$p, \neg q, (\neg p \vee q) \vee r \;\models\; r, \tag{2}$$

tedy zda platí $T \models \varphi$, kde $T = \{p, \neg q, (\neg p \vee q) \vee r\}$ a $\varphi = r$. Pro dané formule vytvoříme tabulku pravdivostních hodnot:

p	q	r	p	$\neg q$	$(\neg p \vee q) \vee r$	r
0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1

V tabulce je jediný řádek, při kterém jsou pravdivé všechny formule z množiny T, tj. formule $p, \neg q, (\neg p \vee q) \vee r$, totiž šestý řádek. V tomto řádku má formule φ, tj. formule r, pravdivostní hodnotu 1. Podle definice to znamená, že (2) platí.

Tato tabulka také ukazuje, že

$$p, (\neg p \vee q) \vee r \;\models\; r$$

neplatí. Formule r je totiž nepravdivá v 7. řádku tabulky, ve kterém jsou přitom obě formule, p i $(\neg p \vee q) \vee r$, pravdivé.

Uvažujme nyní následující tabulku:

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

Ukazuje, že formule $\neg(p \vee q)$ a $\neg p \wedge \neg q$ mají vždy stejné pravdivostní hodnoty, tedy že jsou ekvivalentní (přitom $\neg p \wedge \neg q$ označuje formuli $(\neg p \wedge \neg q)$, tj. vynechali jsme podle výše uvedené dohody vnější závorky):

$$\neg(p \vee q) \;\equiv\; \neg p \wedge \neg q.$$

Podobně platí

$$\neg(p \wedge q) \;\equiv\; \neg p \vee \neg q.$$

Oba tyto vztahy se nazývají *De Morganovy zákony* podle anglického logika Augusta De Morgana (1806–1871). Tyto zákony používáme v běžném uvažování: Tvrzení „Není pravda, že je velký a silný." je ekvivalentní tvrzení „Není pravda, že je velký nebo není pravda, že je silný." Řada ekvivalencí (dvojic ekvivalentních formulí) je známa už ze scholastiky a má svá standardní jména. Uveďme některá z nich. Základní vlastnosti disjunkce vyjadřují ekvivalence:

$$\begin{aligned} p \vee q &\equiv q \vee p && \text{(komutativita } \vee\text{)} \\ (p \vee q) \vee r &\equiv p \vee (q \vee r) && \text{(asociativita } \vee\text{)} \\ (p \vee q) \wedge q &\equiv q && \text{(absorpce)} \end{aligned}$$

Duální ekvivalence (zamění se $\vee$ a $\wedge$) popisují vlastnosti konjunkce. Další důležité vztahy jsou:

$$\begin{aligned} \neg\neg p &\equiv p && \text{(zákon dvojí negace)} \\ p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) && \text{(distributivita } \wedge \text{ a } \vee\text{)} \\ p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) && \text{(distributivita } \vee \text{ a } \wedge\text{)} \\ p \to (q \to r) &\equiv q \to (p \to r) && \text{(zákon výměny)} \\ p \to q &\equiv \neg q \to \neg p && \text{(kontrapozice)} \end{aligned}$$

Následující ekvivalence ukazuje, že disjunkci lze definovat pomocí negace a konjunkce (ověřte ji):

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q).$$

Na druhou stranu lze konjunkci definovat pomocí negace a disjunkce, protože

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q).$$

Poslední dvě ekvivalence mají zajímavý důsledek. Ukazují, že z formálního hlediska se můžeme obejít bez disjunkce, protože, co lze vyjádřit disjunkcí, lze vyjádřit pomocí negace a konjunkce. Naopak, pokud máme negaci a disjunkci, můžeme se obejít bez konjunkce.

Vysvětlili jsme si základní pojmy klasické výrokové logiky. V příštím díle se budeme věnovat tomu, jaké funkce lze vůbec vytvořit z logických spojek, jak k dané formuli najít ekvivalentní, ale velmi krátkou formuli, ukážeme si logickou spojku, pomocí které lze vyjádřit všechny ostatní spojky a zmíníme se o několika aplikacích výrokové logiky.

Úkol 1 *6 bodů*

Rozhodněte, zda následující formule je tautologie, kontradikce, splnitelná:

- $(p \to q) \to ((p \to r) \to (p \to (q \wedge r)))$,
- $(p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r))$,
- $((p \to q) \wedge (r \to q)) \to (p \to r)$.

Odpověď zdůvodněte.

Úkol 2 *6 bodů*

Rozhodněte, zda

- $(p \to (q \vee r)) \wedge \neg r \models p \to q$,
- $\{p, p \to q\} \models q \to p$,
- $p \to q \models p \wedge q$.

Odpověď zdůvodněte (uveďte např. pravdivostní tabulky).

Úkol 3 *13 bodů*

Pomocí tabulky pravdivostních hodnot ukažte, že

- implikaci lze vyjádřit pomocí negace a konjunkce,
- ekvivalenci lze vyjádřit pomocí negace a konjunkce,
- konjunkci lze vyjádřit pomocí negace a implikace,
- disjunkci lze vyjádřit pomocí negace a implikace.

Literatura

[1] R. Bělohlávek, J. W. Dauben, G. J. Klir, 2017. *Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective.* New York: Oxford University Press.

[2] K. Gödel, 2016. *Úplnost a neúplnost.* OPS.

[3] D. Hofstadter, 2012. *Gödel, Escher, Bach.* Praha: Argo/Dokořán.

[4] V. Novák, 1990. *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

[5] A. Sochor, 2011. *Logika pro všechny ochotné myslet.* Praha: Karolinum.

[6] A. Sochor, 2001. *Klasická matematická logika.* Praha: Karolinum.

[7] V. Švejdar, 2002. *Logika, neúplnost, složitost a nutnost.* Praha: Academia.

Katedra informatiky
Univerzita Palackého v Olomouci
17. listopadu 12
771 46 Olomouc