Olomoucký informatický korespondenční seminář – Olinx

Matematická logika a strojové myšlení, 4. díl

Radim Bělohlávek

olinx.inf.upol.cz

V tomto díle se seznámíme s fuzzy logikou. K vytvoření fuzzy logiky vedly některé zásadní nedostatky klasické logiky, zejména její omezená schopnost pracovat s nepřesnými pojmy, tedy s pojmy, které člověk běžně používá. Fuzzy logika představuje moderní směr. Stala se důležitým pilířem umělé inteligence a nalezla uplatnění v mnoha výrobcích, které běžně používáme.

1 Vznik fuzzy logiky

Jen několikrát se v historii logiky stalo, že vznikla významná alternativa k hlavnímu proudu představovanému klasickou logikou. Jednou z takových alternativ je fuzzy logika. Vznikla zhruba před padesáti lety v pracích amerického inženýra a matematika Lotfiho Askera Zadeha (1921–2017). V roce 1965 zveřejnil časopis *Information and Control* jeho

Obrázek 1: Lotfi Zadeh v roce 2004.

práci „Fuzzy sets“. Zadeh v této práci upozornil na to, že základní pojem klasické matematiky – pojem množiny – je v mnoha situacích nedostačující. Množiny reprezentují to, čemu běžně říkáme soubory nebo seskupení nějakých objektů. Seskupeným objektům se říká prvky dané množiny. Máme například množinu sudých čísel, jejímiž prvky jsou sudá čísla, nebo množinu států Spojených států amerických, která má padesát prvků. Charakteristickým rysem množin je, že libovolný prvek do dané množiny buď patří, nebo nepatří. To je v souladu se základním principem klasické logiky, podle kterého každé tvrzení, tedy i tvrzení „prvek patří do množiny“, je buď pravdivé, nebo nepravdivé. Zadeh upozornil na to, že seskupení, se kterými v běžném životě pracujeme, tento rys postrádají a jsou tedy zásadně jiná.

Tvoří například hodnoty (v torrech), odpovídající pojmu *normální krevní tlak* množinu?[1] Do ní by jistě patřila hodnota 120 a naopak nepatřila hodnota 60. Musely by ale existovat hraniční hodnoty $t_1 < t_2$ ostře oddělující hodnoty normálního krevního tlaku. Krevní tlak t by tedy byl normální, právě když by byl mezi t_1 a t_2.[2] Pak by ale pro libovolně malou odchylku ε krevní tlak $t_1 - \varepsilon$ nebyl normální, zatímco tlak $t_1 + \varepsilon$ by normální byl. To je ale absurdní (představme si třeba $\varepsilon = 0.1$) – tak přece člověk pojem *normální krevní tlak* nechápe.

Zadeh si všiml, že klasický pojem množina je v situacích podobných té výše popsané nedostatečný. Ukázal, že z hlediska aplikací je toto pozorování zcela zásadní, že tedy nejde o nějaký okrajový jev, o anomálii, která je zajímavá jen z teoretického hlediska. Výrazy jako „vysoká venkovní teplota“, „nízké otáčky motoru“, „nadváha“ a podobně – tvrdil Zadeh – jsou v našem každodenním uvažování a rozhodování všudypřítomné a nevyhnutelné. Abychom s nimi mohli pracovat, navrhl Zadeh nový pojem – pojem fuzzy množiny – který zmíněné nedostatky nemá. Základní myšlenka fuzzy logiky spočívá v tom, že příslušnost prvku k fuzzy množině je otázkou míry – nemá povahu buď-anebo rozhodování, a není tedy „černobílá“. Po padesáti letech lze konstatovat, že Zadehův nápad byl neobyčejně úspěšný. Jeho práce o fuzzy množinách z roku 1965 patří mezi nejcitovanější práce v historii matematiky, logiky a informatiky a vedla k rozvoji fuzzy logiky jako nové vědní oblasti. Ta má dnes nejen propracované teoretické základy, ale může se pochlubit i obrovským komerčním úspěchem. S trochou nadsázky lze říci, že fuzzy logika je všude kolem nás.

2 Fuzzy množiny

Nevhodnost pojmu klasická množina, o které jsme hovořili výše, plyne z toho, že výroku „objekt x patří do množiny A“ je klasická matematika v souladu s principy klasické logiky ochotna přiznat pouze dvě možné pravdivostní hodnoty – *pravda* a *nepravda*, někdy označované 1 a 0. Fuzzy logika tento princip, zvaný *princip bivalence*, nepřijímá. Podle fuzzy logiky může být výrok pravdivý i jen do určité míry, tj. pravdivý v určitém stupni, který je mezi 0 a 1, např. 0.8. Stupně pravdivosti představují zobecněné pravdivostní hodnoty, přičemž klasické pravdivostní hodnoty 0 a 1 jsou jejich hraničními případy. Tedy například zatímco výrok „120 torrů je normální krevní tlak“ má v souladu s předchozí úvahou pravdivostní hodnotu 1 a výrok „60 torrů je normální krevní tlak“ hodnotu 0, výroku „100 torrů je normální krevní tlak“ můžeme přiřadit pravdivostní hodnotu 0.5. Tím vyjádříme, že krevní tlak 100 torrů sice není úplně normální, ale do jisté míry ano.

Tak lze hovořit o fuzzy množině A hodnot normálního krevního tlaku. Klasickou množinu A lze chápat jako zobrazení

$$A : U \to \{0, 1\},$$

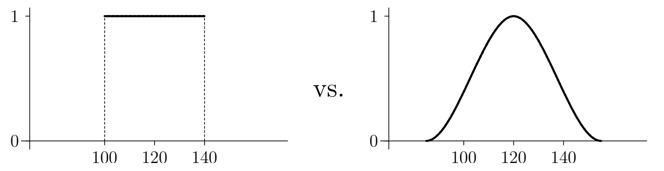
které každému prvku u z daného univerza U uvažovaných prvků přiřadí 1 (tedy $A(u) = 1$), pokud u patří do A, a které přiřadí 0, pokud u do A nepatří. Fuzzy množina v univerzu U je pak zobrazení

$$A : U \to [0, 1], \tag{1}$$

které každému prvku u z U přiřadí stupeň $A(u)$ náležení prvku u do fuzzy množiny A. Čím větší je $A(u)$, tím více

[1] Myslíme systolický tlak.

[2] Pro naši úvahu je nepodstatné, zda to znamená $t_1 < t < t_2$, nebo $t_1 \leq t \leq t_2$.



Obrázek 2: Normální krevní tlak jako klasická množina (vlevo) a jako fuzzy množina (vpravo).

prvek u do A patří. Obrázek 2 ukazuje klasickou množinu a fuzzy množinu, které popisují pojem *normální krevní tlak.*

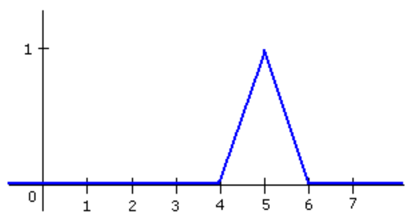
Fuzzy množiny, na rozdíl od klasických, nejsou černobílé, nemají ostré hranice – mezi možnostmi „být prvkem“ (1) a „nebýt prvkem“ (0) je celá škála mezilehlých možností, totiž „být prvkem v jistém stupni“ (např. ve stupni 0.8). Tyto stupně nemusí tvořit celý interval $[0, 1]$, jako tomu bylo výše, viz (2). Můžeme uvažovat i konečnou množinu L pravdivostních hodnot, například $L = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. V tomto případě bychom tyto stupně náležení do fuzzy množiny chápali například jako „vůbec ne“, „jen trochu“, „částečně“, „do značné míry“, a „zcela“ a fuzzy množina by byla zobrazením

$$A : U \to \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}. \qquad (2)$$

Příklad 1. Nechť $U = \mathbb{R}$ (reálná čísla), $L = [0, 1]$. Uvažujme fuzzy množinu $A : U \to L$ definovanou takto:

$$A(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u < 4, \\ x - 4 & \text{pro } 4 \le u \le 5, \\ 6 - x & \text{pro } 5 < u \le 6, \\ 0 & \text{pro } u > 6. \end{cases}$$

Tato fuzzy množina reprezentuje možný význam výrazu „přibližně 5“ a vypadá takto:



Příklad 2. Výraz „dobré (formální) vzdělání“ můžeme reprezentovat fuzzy množinou $A : U \to \{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}$ v univerzu

$$U = \{\text{žádné}, \text{základní}, \text{střední}, \text{Bc.}, \text{Ing.}, \text{Mgr.}, \text{Ph. D.}\},$$

která je definovaná takto:

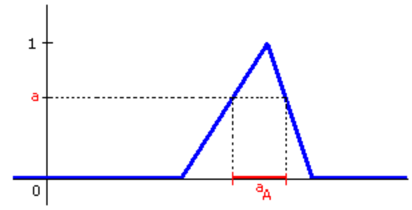
$$\begin{aligned} A \;=\; & \{{}^{0}/\text{žádné}, {}^{0.1}/\text{základní}, {}^{0.5}/\text{střední}, \\ & {}^{0.8}/\text{Bc.}, {}^{0.9}/\text{Ing.}, {}^{0.9}/\text{Mgr.}, {}^{1}/\text{Ph. D.}\}. \end{aligned}$$

Tento zápis znamená, že $A(\text{Bc.}) = 0.8$ atp.

Důležitým pojmem, který propojuje klasické a fuzzy množiny, je pojem řez. Pokud a je pravdivostní hodnota, pak *a-řez* fuzzy množiny A v univerzu U je klasická podmnožina ${}^aA$ množiny U definovaná předpisem

$${}^aA = \{u \in U \mid A(u) \ge a\}.$$

Řez ${}^aA$ tedy obsahuje ty prvky, které do A patří ve stupni a nebo vyšším. Pojem řezu ilustruje následující obrázek.



Příklad 3. Uvažujme fuzzy množinu

$$A = \{{}^{0.2}/u_1, {}^{0.6}/u_2, {}^{0.1}/u_3, {}^{0.8}/u_4, {}^{1}/u_5\}.$$

Její a-řezy pro $a = 0.1$, $a = 0.4$, $a = 0.5$ a $a = 1$ jsou

$$\begin{aligned} {}^{0.1}A &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, \\ {}^{0.4}A &= \{u_2, u_4, u_5\}, \\ {}^{0.5}A &= \{u_2, u_4, u_5\}, \\ {}^{1}A &= \{u_5\}. \end{aligned}$$

Význam řezů spočívá v tom, že umožňují fuzzy množiny reprezentovat pomocí klasických množin. Pro danou fuzzy množinu $A : U \to L$ můžeme totiž uvažovat systém všech jejích a-řezů, tedy systém

$$\{{}^aA \mid a \in L\}.$$

To je systém klasických množin. Z tohoto systému lze v případě potřeby původní fuzzy množinu sestrojit. To si ukážeme za zjednodušujícího předpokladu, že množina L pravdivostních hodnot je konečná. Jak se snadno přesvědčíme, platí pak

$$A(u) = \max\{a \in L \mid u \in {}^aA\}.$$

Tedy stupeň $A(u)$, ve kterém u patří do A, se rovná největšímu stupni a, který má tu vlastnost, že příslušný řez ${}^aA$ obsahuje prvek u.

3 Fuzzy logika jako logika

Odmítnutí principu bivalence, tj. připuštění možnosti, že existují výroky, které nemusí být (úplně) pravdivé, ani (úplně) nepravdivé, je radikální krok. Tímto krokem totiž opouštíme svět klasické logiky důvěrně známý od doby Aristotela. Opouštíme tím také svět, ve kterém se od antiky rozvíjela veškerá matematika, přírodovědné i humanitní obory, i celá západní filozofie. Nový svět, do kterého vstupujeme, je světem jiné logiky. Zda je tato logika – tedy fuzzy logika – životaschopnou, plnohodnotnou alternativou logiky klasické a zda se může stát, podobně jako se stala logika klasická, základem matematiky – tentokráte však matematiky jiné – a metodickým základem dalších oborů, je zásadní, mnohovrstevná a značně složitá otázka. V této kapitole se pokusíme ukázat některé z principů fuzzy logiky jako formální logiky.

Věnujme se nejprve otázce logických spojek ve fuzzy logice. Jak víme, v klasické logice je logická spojka popsána tabulkou, která popisuje její význam (její tzv. pravdivostní funkci). Například tabulka konjunkce vypadá takto:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Stejně jako v klasické logice musí i ve fuzzy logice konjunkce přiřazovat dvěma pravdivostním hodnotám, a a b, výslednou pravdivostní hodnotu $a \wedge b$,[3] a to tak, aby $a \wedge b$ byla pravdivostní hodnota konjunkce dvou tvrzení, z nichž jedno má pravdivostní hodnotu a a druhé b. Přirozenou možností ve fuzzy logice je definovat

$$a \wedge b = \min(a, b).$$

Pokud je tedy výrok „Je zima.“ pravdivý ve stupni 0.5 (tj. má pravdivostní hodnotu 0.5) a výrok „Je jasno.“ ve stupni 0.8, je výrok „Je zima a je jasno.“ pravdivý ve stupni 0.5, neboť $0.5 = \min(0.5, 0.8)$. Tato konjunkce se nazývá Gödelova, protože jako první použil minimum jako vícehodnotovou konjunkci Kurt Gödel.

Existuje však i jiná možnost, která se ve fuzzy logice používá, tzv. Goguenova konjunkce, která je definována předpisem

$$a \wedge b = a \cdot b.$$

Pak by konjunkce výše zmíněných výroků byla pravdivá ve stupni 0.4, neboť $0.4 = 0.5 \cdot 0.8$. Třetí možností je pak tzv. Łukasiewiczova konjunkce, která je definovaná předpisem

$$a \wedge b = \max(0, a + b - 1).$$

Grafy těchto tří uvedených konjunkcí vidíme na obrázku 3. Z těchto grafů je zřejmé, že všechny tyto konjunkce mají společné jisté vlastnosti. Všimněme si nejdříve, že všechny rozšiřují (zobecňují) klasickou konjunkci, a to v tom smyslu, že jsou-li jejich argumenty a a b hodnoty 0 nebo 1, dávají stejný výsledek jako klasická konjunkce. Všechny také splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c, && (3)\\ a \wedge b &= b \wedge a, && (4)\\ \text{je-li } a \leq b \ \ &\text{pak } a \wedge c \leq b \wedge c, && (5)\\ a \wedge 1 &= a. && (6) \end{aligned}$$

To jsou základní vlastnosti, které konjunkce ve fuzzy logice musí splňovat. Uvedené tři konjunkce jsme nevybrali náhodou. Omezíme-li se na konjunkce, které jsou navíc jako funkce spojité,[4] pak lze ukázat, že každou konjunkci lze jistou konstrukcí sestrojit z Gödelovy, Goguenovy a Łukasiewiczovy konjunkce.

Logické spojky jsou v klasické logice základem pro logické odvozování, pro operace s množinami i pro další konstrukce, které mají logickou povahu. Ve zbytku této kapitoly naznačíme, jak je tomu ve fuzzy logice.

Uvažujme klasické množiny A a B. Jejich průnik, $A \cap B$, je definován předpisem

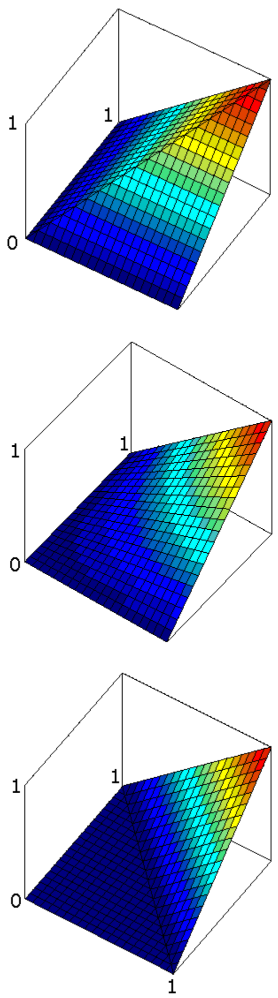
$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ a } u \in B\}.$$

Pro naše potřeby teď budeme tyto množiny chápat jako funkce příslušnosti $A : U \to \{0, 1\}$ a $B : U \to \{0, 1\}$ v daném univerzu U, tj. $A(u) = 1$, znamená, že u patří do A. Snadno vidíme, že průnik lze popsat takto:

$$(A \cap B)(u) = \min(A(u), B(u)).$$

[3] Správně bychom měli odlišovat symbol spojky, $\wedge$, od pravdivostní funkce, $\dot{\wedge}$. Pro jednoduchost budeme obojí označovat stejným symbolem, $\wedge$.

[4] Pokud čtenář nezná pojem spojitosti funkce, může si představit, že graf takové funkce neobsahuje žádné skoky, tj. není nikde přerušený.



Obrázek 3: Tři základní konjunkce ve fuzzy logice: nahoře Gödelova (minimum), uprostřed Goguenova (součin), dole Łukasiewiczova.

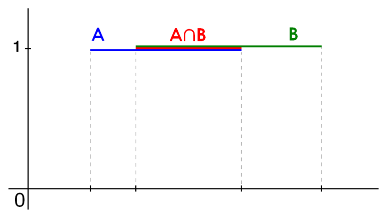
Výraz $\min(A(u), B(u))$ přitom odpovídá tomu, že aplikujeme klasickou konjunkci (ta je vyjádřena funkcí min) na pravdivostní hodnoty $A(u)$ a $B(u)$. Tento průnik je znázorněn na obrázku 4.

Ve fuzzy logice se průnik fuzzy množin $A : U \to [0, 1]$ a $B : U \to [0, 1]$ definuje v principu stejně, tedy opět předpisem

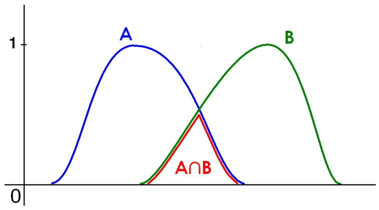
$$(A \cap B)(u) = \min(A(u), B(u)).$$

Rozdíl je v tom, že $A(u)$ a $B(u)$ jsou nyní obecné stupně pravdivosti z intervalu $[0, 1]$ a že min reprezentuje Gödelovu konjunkci. Takový průnik fuzzy množin je znázorněn na obrázku 5.

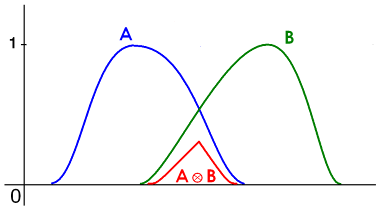
Příklad 4. Určíme průnik fuzzy množin A a B v univerzu



Obrázek 4: Průnik klasických množin.



Obrázek 5: Průnik fuzzy množin založený na Gödelově konjunkci.



Obrázek 6: Průnik fuzzy množin založený na obecné konjunkci ⊗.

$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Je-li

$$\begin{aligned} A &= \{{}^{1}/2, {}^{0.5}/3, {}^{0.8}/5, {}^{1}/6\} \text{ a} \\ B &= \{{}^{1}/1, {}^{0.2}/3, {}^{0.5}/4, {}^{0.8}/5\}, \text{ je} \\ A \cap B &= \{{}^{0.2}/3, {}^{0.8}/5\}. \end{aligned}$$

Pro jinou konjunkci, řekněme ⊗, by ale průnik vypadal jinak. Ukazuje to obrázek 6. Je to proto, že takový průnik je definován předpisem

$$(A \cap B)(u) = A(u) \otimes B(u).$$

Zkuste zdůvodnit, proč graf průniku $A \cap B$ založeného na obecné konjunkci ⊗ leží pod grafem A i pod grafem B.

Nemůžeme se zde podrobněji věnovat formálním aspektům fuzzy logiky. Uvedeme pouze, že stejně jako klasická logika má solidně propracované základy v podobě výrokové logiky, predikátové logiky a dalších systémů, má dnes i fuzzy logika solidně propracované základy. Zájemce odkazujeme na knihu [1]. Abychom alespoň stručně nastínili, jak ve fuzzy logice probíhá formální logické usuzování, podíváme se teď na tzv. paradox hromady.

Paradox hromady (nazývaný také sorites) je známý a významný paradox, jehož formulace je připisována Eubúlidovi z Milétu (4. stol. př. n. l.). Je formulován takto:

> 0 zrnek písku netvoří hromadu.
>
> Když n zrnek netvoří hromadu, pak ani $n + 1$ zrnek netvoří hromadu.
>
> Závěr: Pro žádné číslo n netvoří n zrnek písku hromadu.

Závěr je evidentně nepravdivý, ale odvodili jsme ho všeobecně používanou metodou matematické indukce z předpokladů, které považujeme za pravdivé, což je paradox.

Fuzzy logika nabízí přirozené řešení tohoto paradoxu. To samo o sobě je podstatná skutečnost, protože k rozřešení dlouhotrvajícího paradoxu je obvykle třeba prolomit hluboce zakořeněné, omezující paradigma. Tímto paradigmatem je v našem případě pochopitelně výše zmíněný princip bivalence.

Nechť $NH(n)$ označuje tvrzení, že n zrnek netvoří hromadu. Pak paradox hromady lze schematicky znázornit následovně:

$$\frac{\begin{array}{l} NH(0) \\ NH(n) \to NH(n+1) \end{array}}{\text{pro každé } n\text{: } NH(n)}$$

Z hlediska fuzzy logiky je přirozené přijmout, že $NH(0)$ je pravdivá ve stupni 1. Formuli $NH(n) \to NH(n+1)$ je však přirozené považovat za pravdivou v nějakém vysokém stupni, řekněme 0.99, ale ne ve stupni 1. Jak ale z takových předpokladů, které jsou pravdivé jen částečně, odvozovat závěry? Fuzzy logika pro tento případ nabízí zobecněnou verzi odvozovacího pravidla *modus ponens*. Tu navrhl v roce 1968 ve své průlomové práci „The logic of inexact concepts“ americký informatik Joseph A. Goguen. Toto zobecněné pravidlo lze znázornit schématem

$$\frac{{}^{a}/\varphi, {}^{b}/\varphi \to \psi}{{}^{a \otimes b}/\psi},$$

které znamená, že z formule φ platné ve stupni a a formule $\varphi \to \psi$ platné ve stupni b můžeme odvodit, že formule ψ je platná ve stupni $a \otimes b$. Přitom $a \otimes b$ je výsledek konjunkce ⊗ použité na stupně a a b. Použijme, jak to učinil Goguen ve své práci z roku 1968, za konjunkci ⊗ součin, tedy $a \otimes b = a \cdot b$. V naší situaci můžeme tedy provést následující úsudky. Nejprve odvodíme

$$\frac{{}^{1}/NH(0), {}^{0.99}/NH(0) \to NH(1)}{{}^{0.99}/NH(1)}.$$

Stupeň 0.99 u odvozené formule $NH(1)$ jsme totiž získali jako stupeň $a \otimes b$ z výše uvedeného schématu, protože $a \otimes b = 1 \cdot 0.99 = 0.99$. Dále odvodíme

$$\frac{{}^{0.99}/NH(1), {}^{0.99}/NH(1) \to NH(2)}{{}^{0.99^2}/NH(2)},$$

protože v tomto případě $a \otimes b = 0.99 \cdot 0.99 = 0.99^2$. Snadno nahlédneme, že tak po n krocích odvodíme

$$\frac{{}^{0.99^{n-1}}/NH(n-1), {}^{0.99}/NH(n-1) \to NH(n)}{{}^{0.99^n}/NH(n)}.$$

Tento závěr říká, že tvrzení „n zrnek písku netvoří hromadu“ je pravdivé ve stupni 0.99^n. Čím více zrnek, tím méně je tedy toto tvrzení pravdivé, což je v souladu s intuicí. Pro $n = 100$ tak odvodíme stupeň přibližně rovný 0.37.[5] Paradox byl odstraněn. Pojem hromada je totiž „fuzzy pojem“, tedy pojem, který nemá – na rozdíl od klasických pojmů jako je třeba pojem prvočíslo – ostře vymezené, černobílé hranice. Předpokládat, že tvrzení „n zrnek písku netvoří hromadu“ může být jen pravdivé, nebo nepravdivé, jak činí formulace paradoxu hromady, je tedy nesprávné. To je důvod zdánlivého paradoxu.

4 Od počátečního odporu k masovému nasazení

Připustit, že existují i jiné pravdivostní hodnoty než pravda a nepravda, je radikální krok. Zadehův pojem fuzzy množiny a obecněji pak fuzzy logika jako alternativa klasické logiky proto představuje – řečeno termínem Thomase

[5] Hodnotu 0.99 jsme zvolili pro ilustraci. Můžeme zvolit jinou hodnotu, např. 0.999, a získat tak jiné závěry, které se někomu mohou zdát lépe odpovídající tomu, jak chápe pojem hromada.

Kuhna – nové paradigma.[6] Od Kuhna víme, že nové paradigma se prosazuje obtížně a je mu kladen odpor. Fuzzy logika v tomto směru nebyla výjimkou. Pro příklad uveďme, co řekl o fuzzy logice ještě v roce 1975 William Kahan, významný vědec a profesor na univerzitě v Berkeley: „Fuzzy logika je chybná, chybná a zničující. … Co potřebujeme, je více, ne méně logického myšlení. Nebezpečí fuzzy teorie je v tom, že povzbudí právě ten typ nepřesného myšlení, který nám způsobil tolik problémů.“

Stále více lidí však začalo chápat, že fuzzy logika je životaschopnou alternativou logiky klasické a že – a to především – umožňuje řešit důležité problémy. Poměrně rychle se proto začal rozvíjet výzkum fuzzy logiky, který nakonec vedl k praktickým realizacím i k výrazným komerčním úspěchům.

Komerčně jednoznačně nejúspěšnější aplikací fuzzy logiky jsou tzv. pravidlové fuzzy systémy a na nich založené fuzzy regulátory. Jejich princip stručně vysvětlíme v příští kapitole. Fuzzy regulátory byly poprvé komerčně použity pro řízení cementové pece v dánské společnosti F. L. Smidth & Company v roce 1980. Obrovský rozmach, označovaný jako „fuzzy boom“, však zaznamenaly koncem 80. a začátkem 90. let v Japonsku. Fuzzy regulátory tam byly například nasazeny k řízení metra v městě Sendai. Vlaky se tak – bez zásahů lidského operátora, plně řízené fuzzy logikou – rozjížděly i zastavovaly plynuleji, byly schopné přesně zastavit na určeném místě a dokonce spotřebovávaly o 10% méně energie. Tento úspěch později vedl k zavedení podobného systému i v Tokiu. Zejména se však fuzzy regulátory prosadily v nejrozmanitějších výrobcích na trhu se spotřební elektronikou. V obchodech se začaly ve velkém prodávat fuzzy logikou řízené fotoaparáty, pračky, vysavače, vařiče rýže a mnohé další výrobky. Podle záznamů japonského ministerstva průmyslu a obchodu činil v roce 1991 obrat japonského trhu s výrobky řízenými fuzzy logikou (70% z toho byla spotřební elektronika) cca 2 miliardy amerických dolarů, což odpovídá neuvěřitelnému 1% tehdejšího celosvětového trhu s počítačovými technologiemi.

„Fuzzy boom“ je sice již minulostí, nicméně fuzzy logika je dnes rutinně používána v mnoha oblastech. I když o tom možná nevíme, setkáváme se s ní denně i na českém trhu – je například v pračkách nebo v automatických převodovkách koncernu Volkswagen. Japonská firma Omron, jejíž měřiče tlaku jsou běžně k dostání i u nás, v roce 2013 oznámila, že prodala již 120 miliónů měřičů fungujících na bázi fuzzy logiky.

5 Pravidlové fuzzy systémy

Pravidlové fuzzy systémy a fuzzy regulátory, které jsme zmínili v předchozí kapitole, vycházejí z faktu, že v mnoha případech je člověk – expert – schopen řídit i systém, který je značně složitý a metodami klasické teorie řízení nezvládnutelný. Modely klasické teorie řízení potřebují znát fyzikální model řízeného systému. Expert naproti tomu řídí systém pomocí algoritmu, který je schopen popsat v přirozeném jazyce a který fyzikální model znát nepotřebuje. Expert například ví, že jestliže je teplota v místnosti velmi vysoká a otáčky větráku nízké, pak je třeba otáčky výrazně zvýšit. Zeptáme-li se ho tedy, jak vlastně systém řídí – v tomto jednoduchém příkladě tedy řídí větrání místnosti –, řekne nám že používá několik pravidel tvaru „jestliže–pak“. Tato pravidla, jako to právě uvedené, téměř vždy obsahují vágní výrazy („velmi vysoká teplota“ apod.) a expert je na základě nich schopen logicky odvodit správný závěr, akční zásah, například správně nastavit rychlost větráku. To je pro fuzzy logiku příhodná situace. Fuzzy logika umí vágní výrazy matematicky reprezentovat, pracovat s nimi a nakonec provádět logické úsudky, které simulují expertovo uvažování. Výsledný systém, tzv. pravidlový fuzzy systém nebo fuzzy regulátor, tedy v tomto smyslu napodobuje operátorovo rozhodování, aniž by bylo nutné znát fyzikální model řízeného systému.

Pravidlový fuzzy systém sestává z následujících komponent:

- báze pravidel,
- inferenční modul,
- případně modul tzv. defuzzifikace.

Báze pravidel je množina m pravidel následujícího tvaru ($j = 1, \ldots, m$):

$$\text{JESLTIŽE } x_1 \text{ je } \mathcal{A}_{j1} \text{ a } \cdots \text{ a } x_n \text{ je } \mathcal{A}_{jn}, \text{ PAK } y \text{ je } \mathcal{B}_j,$$

kde $x_1, \ldots, x_n, y$ jsou proměnné s možnými hodnotami v množinách $X_1, \ldots, X_n, Y$ a kde $\mathcal{A}_{j1}, \ldots, \mathcal{A}_{jn}, \mathcal{B}_j$ jsou jazykové výrazy jako „malá“, „velmi vysoká“ apod. Inferenční modul představuje algoritmus, který umožní na základě hodnot vstupních proměnných x_i odvodit hodnotu výstupní proměnné y. Hodnotou y může být i fuzzy množina v Y, ze které se v případě potřeby metodou defuzzifikace vypočítá konkrétní hodnota v Y.

Celý postup si podrobně ukážeme na jednoduchém příkladu. Budeme uvažovat jeden vstup, tj. $n = 1$. Množinu X_1 vstupních hodnot budeme značit jen X a budeme předpokládat, že $X = Y = \{0, 1, \ldots, 10\}$. Dále budeme předpokládat, že báze $\mathcal{R}$ pravidel obsahuje následující tři pravidla:

$$\begin{aligned}&\text{JESTLIŽE } x \text{ je přibližně 2, PAK } y \text{ je zhruba 3,}\\&\text{JESTLIŽE } x \text{ je zhruba 4, PAK } y \text{ je přibližně 7,}\\&\text{JESTLIŽE } x \text{ je přibližně 7, PAK } y \text{ je přibližně 9,}\end{aligned}$$

která budeme dále označovat takto:

$$\begin{aligned}&\text{JESTLIŽE } x \text{ je } \mathcal{A}_1, \text{ PAK } y \text{ je } \mathcal{B}_1,\\&\text{JESTLIŽE } x \text{ je } \mathcal{A}_2, \text{ PAK } y \text{ je } \mathcal{B}_2,\\&\text{JESTLIŽE } x \text{ je } \mathcal{A}_3, \text{ PAK } y \text{ je } \mathcal{B}_3.\end{aligned}$$

Tedy $\mathcal{A}_1$ je výraz „přibližně 2“ atd. Jaká výstupní hodnota odpovídá podle této báze pravidel vstupní hodnotě $x = 5$?

Ukážeme si, jak tuto otázku řeší tzv. Mamdaniho přístup, který je v praxi nejčastěji používaným. Jazykovým výrazům $\mathcal{A}_j$ a $\mathcal{B}_j$ nejdříve přiřadíme fuzzy množiny A_j a B_j, které přirozeně odpovídají jejich významu. Zvolíme následující:

x/y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_1(x)$	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0
$B_1(y)$	0	0.5	0.75	1	1	0.75	0.5	0	0	0	0
$A_2(x)$	0	0	0.25	0.75	1	0.75	0.25	0	0	0	0
$B_2(y)$	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0
$A_3(x)$	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0
$B_3(y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5

Tedy $A_1(0) = 0$, $A_1(1) = 0.5$, …, $B_3(10) = 0.5$.

Dále určíme fuzzy relace R_1, R_2 a R_3, které naše tři pravidla reprezentují. Fuzzy relace R_j přiřazuje každé dvojici $x \in X$ a $y \in Y$ stupeň $R_j(x, y)$, ve kterém jsou x a y ve

[6] Kuhn, T. S. *The Structure of Scientific Revolutions.* Chicago: Univ. of Chicago Press, 1962.

vztahu, který R_j reprezentuje. Poznamenejme, že do klasické binární relace daná dvojice buď patří, nebo nepatří. Například dvojice prvků 1 a 3 patří do relace $<$ (být menší). Do fuzzy relace daná dvojice patří v určitém stupni. Například dvojice bratrů, kteří jsou si značně podobní, může do relace „být podobný“ patřit ve stupni 0.8. Stupeň $R_j(x, y)$ je definován předpisem

$$R_j(x, y) = A_j(x) \wedge B_j(y),$$

tedy např.

$$R_1(1, 2) = A_1(1) \wedge B_1(2) = 0.5 \wedge 0.75 = \min(0.5, 0.75).$$

Naše R_1, R_2 a R_3 jsou popsány následujícími tabulkami (stupeň $R_j(x, y)$ je v průsečíku sloupce x a řádku y):

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0.5	0.75	0.5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.5	0.75	0.5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0	0	0	0
7	0	0	0.25	0.75	1	0.75	0.25	0	0	0	0
6	0	0	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0.5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0.5	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Výsledná fuzzy relace R, která reprezentuje celou bázi pravidel, je sjednocením fuzzy relací R_1, R_2 a R_3, tedy $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, což znamená, že

$$R(x, y) = \max(R_1(x, y), R_2(x, y), R_3(x, y)).$$

Fuzzy relace R je tedy popsána následující tabulkou:

10	0	0	0	0	0	0	0.5	0.5	0.5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0.5	1	0.5	0	0
8	0	0	0.25	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0
7	0	0	0.25	0.75	1	0.75	0.25	0	0	0	0
6	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.25	0	0	0	0
5	0	0.5	0.75	0.5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0.5	1	0.5	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.5	0.75	0.5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Předpokládejme, že je dána fuzzy množina A', která popisuje skutečnou hodnotu vstupu (A' může třeba reprezentovat výraz „asi 5“ nebo „velmi malá“ nebo „přesně 5“). Podle inferenčního mechanismu, který se nazývá kompoziční pravidlo inference (angl. compositional rule of inference), se ze vstupní fuzzy množiny A' a báze pravidel reprezentované fuzzy relací R odvodí výstupní fuzzy množina $B' = A' \circ R$ definovaná tak, že pro každou $y \in Y$ je

$$B'(y) = \max_{x \in X}(A'(x) \wedge R(x, y)),$$

přičemž budeme opět uvažovat, že $A'(x) \wedge R(x, y) = \min(A'(x), R(x, y))$. Vstupní fuzzy množina A' se tedy zobrazí na výstupní fuzzy množinu B'.

Tento přístup umožňuje řešit i situace, při kterých je vstupní hodnota konkrétní prvek x' z množiny X (tedy nikoli fuzzy množina A' prvků z X) a jako výstup je požadována konkrétní hodnota y' z Y (tedy nikoli fuzzy množina B' prvků z Y). Je-li $x' \in X$ ona vstupní hodnota, můžeme ji převést na jednoprvkovou fuzzy množinu $\{^1/x'\}$, tj. vzít $A' = \{^1/x'\}$ a postupovat při inferenci jako výše. Převod x' na $\{^1/x'\}$ je speciálním případem *fuzzifikace.* Je-li naopak B' odvozená výstupní fuzzy množina a my potřebujeme konkrétní hodnotu y' z Y. Potřebujeme třeba konkrétní hodnotu akčního zásahu, například hodnotu, na kterou se nastaví rychlost větráku. Tuto hodnotu získáme metodou *defuzzifikace.* Hodnota y' má vhodně reprezentovat fuzzy množinu B'. Často používanou metodou defuzzifikace je tzv. metoda těžiště. V našem případě by se takto získaná hodnota $y' = D(B')$ vypočítala podle vzorce

$$y' = D(B') = \frac{\sum_{y \in Y} y \cdot B'(y)}{\sum_{y \in Y} B'(y)}.$$

Vraťme se k našemu zadání. Máme zjistit, jaký výstup odpovídá vstupní hodnotě $x' = 5$. Hodnotu $x' = 5$ nejdřív převedeme na fuzzy množinu $A' = \{^1/5\}$. Pak dle výše uvedeného postupu odvodíme B'. Například pro $y = 6$ dostaneme

$$\begin{aligned} B'(6) &= \max_{x \in X} \min(A'(x), R(x, 6)) \\ &= \max_{x \in X} \min(\{^1/5\}(x), R(x, 6)) \\ &= \min(\{^1/5\}(5), R(5, 6)) = \min(1, 0.5) = 0.5. \end{aligned}$$

Tak postupně odvodíme, že výstupem je fuzzy množina

$$B' = A' \circ R = \{^{0.5}/6, ^{0.75}/7, ^{0.5}/8\}.$$

Pokud bychom potřebovali konkrétní hodnotu y', spočítali bychom ji výše uvedenou metodou těžiště, tj.

$$y' = D(B') = \frac{6 \cdot 0.5 + 7 \cdot 0.75 + 8 \cdot 0.5}{0.5 + 0.75 + 0.5} = \frac{12.25}{1.75} = 7.$$

Následující tabulka ukazuje pro všechny vstupní hodnoty x' jim odpovídající výstupní fuzzy množiny B' ($\emptyset$ označuje prázdnou fuzzy množinu, tj. $\emptyset(y) = 0$):

vstup x'	výstupní fuzzy množina $B' = \{^1/x'\} \circ R$
10	$\emptyset$
9	$\emptyset$
8	$\{^{0.5}/8, {}^{0.5}/9, {}^{0.5}/10\}$
7	$\{^{0.5}/8, {}^{1}/9, {}^{0.5}/10\}$
6	$\{^{0.25}/6, {}^{0.25}/7, {}^{0.5}/8, {}^{0.5}/9, {}^{0.5}/10\}$
5	$\{^{0.5}/6, {}^{0.75}/7, {}^{0.5}/8\}$
4	$\{^{0.5}/6, {}^{1}/7, {}^{0.5}/8\}$
3	$\{^{0.5}/1, {}^{0.5}/2, {}^{0.5}/3, {}^{0.5}/4, {}^{0.5}/5, {}^{0.5}/6, {}^{0.75}/7, {}^{0.5}/8\}$
2	$\{^{0.5}/1, {}^{0.75}/2, {}^{1}/3, {}^{1}/4, {}^{0.75}/5, {}^{0.5}/6, {}^{0.25}/7, {}^{0.25}/8\}$
1	$\{^{0.5}/1, {}^{0.5}/2, {}^{0.5}/3, {}^{0.5}/4, {}^{0.5}/5, {}^{0.5}/6\}$
0	$\emptyset$

Pokud navíc provedeme na takto získané fuzzy množiny B' defuzzifikaci metodou těžiště, dostaneme vstupně-výstupní závislost popsanou následující tabulkou. V ní „ND“ odpovídá případům, ve kterých je výstupní fuzzy množina B' prázdná a ve kterých tedy výstupní hodnotu y' považujeme za nedefinovanou.

x'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B'	ND	3.5	3.9	4.65	7	7	8.375	9	9	ND	ND

6 Závěrem

Přes skutečnost, že fuzzy logika jako nový trend v logice a umělé inteligenci již dosáhla významných úspěchů, stále nabízí řadu otázek, na které dosud nejsou odpovědi známé. Proto je fuzzy logika stále předmětem intenzívního zkoumání. Lze očekávat, že v nadcházejících letech bude fuzzy logika jako nová metoda stále více pronikat zejména do těch oborů, v nichž je popis problémů, definic a řešení typicky prováděn pomocí přirozeného jazyka a je tedy ze své podstaty plný pojmů, které nejsou černobílé, a v nichž tedy formalizace přirozeně fuzzy logiku vyžaduje. Další informace o fuzzy logice a fuzzy množinách čtenář najde v česky psané knize [2]. Podrobné pojednání o historii fuzzy logiky, jejím vývoji a perspektivách představuje kniha [1].

Úkol 1 *10 bodů*

(a) Uvažujte fuzzy množinu A z příkladu 1. Určete řezy ${}^0A$, ${}^{0.5}A$ a ${}^1A$.
(b) Zdůvodněte, proč z $a \le b$ plyne ${}^bA \subseteq {}^aA$.
(c) Může se stát, že řezy ${}^aA$ fuzzy množiny A jsou pro všechna $a > 0$ stejné?

Úkol 2 *10 bodů*

Rozhodněte, zda následující funkce na intervalu $[0, 1]$ jsou konjunkce ve fuzzy logice, tj. zda splňují podmínky (3)–(6). Zdůvodněte.

$$a \wedge b = a^2 \cdot b^2, \tag{7}$$

$$a \wedge b = \frac{a+b}{2}, \tag{8}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} a & \text{pokud } b = 1, \\ b & \text{pokud } a = 1, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \tag{9}$$

$$a \wedge b = \begin{cases} \min(a, b) & \text{pokud } a + b > 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{10}$$

Úkol 3 *5 bodů*

Defuzzifikujte metodou těžiště fuzzy množinu

$$B = \{^{0.5}/1, {}^{0.5}/2, {}^{0.75}/3, {}^{0.75}/4, {}^{1}/5, {}^{0.5}/6, {}^{0.5}/7, {}^{0.25}/8, {}^{0}/9\}.$$

Literatura

[1] R. Bělohlávek, J. W. Dauben, G. J. Klir, 2017. *Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective.* New York: Oxford University Press.

[2] V. Novák, 1990. *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* Praha: Státní nakladatelství technické literatury.

Katedra informatiky
Univerzita Palackého v Olomouci
17. listopadu 12
771 46 Olomouc